



INSTITUTIONES
ANALYTICÆ
EARUMQUE USUS
IN GEOMETRIA
CUM APPENDICE

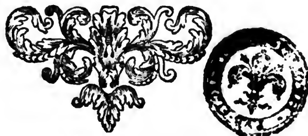
De Constructione Problematum solidorum

AUCTORE

PAULINO A S. JOSEPHO LUCENSI

Cler. Reg. Scholar. Piar. & in Archigymn. Romano
Eloquentiæ Professore.

EDITIO ALTERA.



ROMÆ, MDCCXLV.

TYPIS JOANNIS ZEMPEL APUD MONTEM JORDANUM.

SUPERIORUM PERMISSU.



CANDIDÆ ATQUE INGENUÆ

MATHEMATUM

STUDIOSÆ JUVENTUTI

Has de Analysi Institutiones
Præceptis breves, at exemplis
uberrimas,
De summorum Analystarum
penu depromptas,
Auctas iterumque illustratas
Auctor libens ultroque

D. D. D.

AD LECTOREM



IRABERIS fortasse Eloquentiæ professorem de ALGEBRA scribere, cum illa amænitates, elegantiam & dicendi copiam amet, hæc sicca, austera & tota ad severitatem composita esse videatur. At mirare potius, me his temporibus de Algebra ipsa scribere, in quibus tot præclara de illa extant clarissimorum virorum volumina; quibus quicquam addere, arrogantiæ, quicquam demere, temeritatis est. Hoc quidem me, ut verum fatear, diu ancipitem habuit, diuque prohibuit, quominus publici juris facerem, quæ meo tantum privato studio selegeram. At vero cum animadverterem magna illa Analyticæ artis Autographa, quæ nobis incomparabiles viri Vieta, Cartesius, Wallisius, Newtonus, Reinau, ac Wolfius denique tradiderunt, ægre in omnium manibus posse versari, cum ob exemplorum paucitatem & pretium, tum ob multam ea percipiendi difficul-

tatem,

tatem, quæ in his ſubtiliora de Mathematicis & Phyſicis continentur; illa mihi potius conſcripta eſſe videbantur viris jam in calculi ſcientia exercitatis, quam tyronibus, qui faciliora, tum etiam pauciora petunt: quamobrem his ſaltem hunc libellum non inutilem fore judicavi. Itaque id perpetuo præ oculis habens, me non viris doctis aliquid de Analyſi novum promere, ſed juventutem a primis ejuſdem diſciplinæ rudimentis inſtituendam ſuſcepiſſe, quæ ſcilicet ultra communem Arithmeticam, Euclidis elementa & pauca Archimedis theoremata progreſſa non eſſet: in id totus incubui, ut quæ minus dilucide ab aliis eſſent explicata, aut ad tyronum captum haud ſatis apta viderentur, ea magis explanarem, magiſque ordinate diſponerem. Idcirco etiam minima, quæ ad id conferrent, conſectatus ſum: quorum defectus ſæpe ſolet ab incepto curſu diſcentes non ſine multo temporis diſpendio retardare. Neque enim juvenes omnes ſummo ingenio & acriori mentis vi donatos cogitare debemus. Sunt complures mediocri intellectu præditi, quibus tamen ad ejuſmodi ſtudia, unde eorum mens mirum in modum perfici ac roborari valeat, iter omnino

inter-

intercludi non debet. Adde plerosque aliis quoque disciplinis addictos haud posse diem integrum in calculo & Mathematicis meditationibus ponere. Quid si illis divinatione opus sit, ut auctoris mentem assequantur, diuque subobscuri, vel ambigui sermonis sensum speculari cogantur? Quo quidem nihil est ab omni Mathesi magis alienum: in cujus laudibus Geometræ omnes perspicuitati & evidentiæ primas deferunt. Quocirca videant quam longe a proposito aberrent qui his de rebus obscure ac perplexe loquentes, se tamen in juventutis usum scribere profitentur. Pugnare (pace eorum dicam) secum ipsi videntur, dum scientiam alioqui reconditam obscuritate verborum & ambagibus infuscant, quam potissimum susceperant illustrandam. At vero cum *in scientiis addiscendis*, ut magnus Newtonus (*a*) inquit, *exempla magis, quam præcepta prosint*, in iis tradendis brevitate, quam maxima potui, usus sum: omissis idcirco demonstrationibus, sicubi eas minus necessarias putaverim. Exempla vero congessi plurima, quæ facilitate non minus ac elegantia ceteris antecellerent, ex quibus non pauca clarissimis Mathematicis, quos paulo

(*a*) Arithm. Univ. edit. 3. p. 179.

paulo ante nominavi, tum aliis quoque accepta refero; quorum nomina, præsertim si pulcherrimæ alicujus methodi auctores extiterint, in Scholiis apposui, ut una simul tyrones in historia Mathematica erudiantur, tum etiam ut debita unicuique laus tribuatur. *Est enim benignum*, uti nos Plinius (*a*) admonet, *& plenum ingenui pudoris fateri, per quos profeceris*. Ceterum quicquid sit de facilitate ac brevitate methodi a nobis susceptæ, illud sibi studiosi juvenes persuadeant, neminem triduo vel quatriduo fieri Algebristam; neque inter ambulandum & oscitanter posse calculi scientiam obtineri. Non emitur profecto tam vili disciplina illa, quam summi ingenii & subtilitatis vir Cardanus (*b*) *Artem Magnam*, quam *universæ Matheseos clavim* Ougthredus (*c*), quam denique Wolfius (*d*) *apicem totius humanæ eruditionis* appellat. An ludus tibi videtur paucis lineis posse difficillima quæque in omni naturali scientia problemata solvere, ac Geometrice componere? Enim vero sedulo insistas oportet in iis maxime accurate calculandis,
quæ

(*a*) In præfat. hist. Natur. (*b*) Oper. Vol. 4. pag. 221.
(*c*) Clavis Mathem. Oxonii an. 1631. & 1693. (*d*) In præfat. ad Elem. Analys.

quæ quatuor, aut quinque prioribus hujus libri capitibus comprehenduntur. Ubi ex his vadis emerseris, omnia fere tibi plana occurrent, præsertim si quempiam viæ ducem habeas: quod si neminem (quod sæpe usuvenit) at tute ipse tibi ductor sis & magister, macte animo, μελέτη τὸ πᾶν, inquit Periander. Quem tibi offero libellum diligenter evolve, nec pigeat calamo excipere & ad calculum revocare sigillatim, quæ inibi traduntur: cito progressus in hoc studio non poenitendos experiere.

LECTORI TYPOGRAPHUS.

CUM paucis annis exemplaria omnia Institutionum harum Analyticarum distracta essent, eaque a multis in diem exquirerentur, rogavi sæpius Cl. Auctorem, ut alteram harum editionem a me fieri concederet, quod ille tandem annuit. Imo etsi publicis aliis studiis, & occupationibus impeditus, pro singulari tamen suo erga Mathematicas disciplinas amore, totum opus incudi reddere, politius limare, eique manum extremam admovere sibi sumpsit. Summa itaque diligentia & haud mediocri labore plura correxit, non pauca illustravit, nova demum problemata addidit, ita ut opus ex majori parte recusum esse videatur. Fruere igitur si sapis, ac vale.

JO: FELIX A VIRGINE PRÆSENTATA

Cler. Reg. Pauperum Matris Dei Scholarum Piarum

PRÆPOSITUS GENERALIS.

CUM librum, cui titulus *Institutiones Analyticæ earumque usus in Geometria*, Auctore P. Paulino a S. Josepho Lucensi Cler. Reg. Scholarum Piarum, duo ex nostris, quibus commissum fuit, recognoverint, approbaverint, ac studiosæ juventuti perutilem existimaverint; ut typis mandetur, si iis, ad quos spectat, ita videbitur, facultatem in Domino concedimus. Romæ in Ædibus nostris S. Pantaleonis Scholar. Piar. die IX. Septembris 1737.

Jo: Felix a Virg. Præsent. Præp. Gener.

Jo: Baptista a S. Maria Magd. Secret.

REIMPRIMATUR.

Si videbitur Revmo Patri Magistro Sacri Palatii Apostolici.

F. M. de Rubeis Archiep. Tarsi Vicesg.

APPROBATIO.

LEgi diligenter, ut mihi demandatum fuit a Revmo P. Fr. Jo: Benedicto Zuanelli Sac. Palatii Magistro, librum, cui titulus *Institutiones Analyticæ earumque usus in Geometria*, in quo nihil reperi seu contra fidem, seu contra bonos mores: immo fateor in eo omnia præcipua Algebræ elementa concinne, dilucide & copiose tractari. Quare dignissimum puto publici juris fieri, ut hanc doctrinam, ad ceteras scientias adeo necessariam, quicunque assequi voluerit, celerrime & facillime consequatur. Romæ die 8. Septembris 1737.

Franciscus Xaverius Brunetti.

REIMPRIMATUR.

Fr. Nicolaus Ridolfi Sacri Palatii Apost. Magister Ord. Prædic.

INSTI-



INSTITUTIONES ANALYTICÆ.

DEFINITIONES.

I. ALGEBRA, ſeu ANALYSIS SPECIOSA, quæ a quibuſdam MATHESIS UNIVERSALIS dicitur, eſt methodus reſolvendi problemata circa quantitatem.

II. *Quantum* dicitur omne id, quod augeri & minui poteſt, ut numerus, linea, ſuperficies, corpus, tempus, motus, velocitas &c.

III. Quantitates Analyticæ exprimuntur per Alphabeti literas, ſed hoc diſcrimine: literæ priores a, b, c, d &c. adhibentur ad exprimendas quantitates *cognitas*, ſeu *datas*; poſtremæ vero x, z, y, v ad *incognitas*, & *quæſitas*.

IV. Conducit etiam memoriæ quantitates tam cognitas, quam incognitas deſignare per primam literam rei, quam ſignificant, ut numerum per n, ſummam per s, tempus per t, velocitatem per v, circuli radium per r, tangentem per t &c.

V. Multiplicia, vel submultiplicia quantitatum exprimi solent indeterminate & in genere per literas *m*, *n*, *r*, ut *mx*, *ny*, *rz*, prout *m*, *n*, *r* numeros integros, vel fractos designant. In particulari vero & in specie exprimuntur per numeros integros, vel fractos, ut $2x$, $3z$, $4y$, & significant duplum, triplum, quadruplum quantitatum *x*, *z*, *y*. Quemadmodum $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}b$, $\frac{1}{4}c$; vel etiam $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{3}$, $\frac{c}{4}$ significant partem aliquotam quantitatum *a*, *b*, *c*; hoc est dimidium *a*, tertiam partem *b*, quartam partem *c*.

VI. Quanta, quibus præmittitur signum Plus +, *affirmativa*, *ac positiva* dicuntur. Quæ vero præferunt signum Minus —, *negativa*, seu *privativa*. Quæ autem principio posita sunt & omni signo carent, habentur pro affirmativis & quasi signo + affecta.

VII. Quantitates Analyticæ, quæ signis + & — non sunt connexæ, dicuntur *simplices*, *monomiæ*, *& incomplexæ*, ut *ab*, *abc*, $\frac{ab}{c}$. Contra vero $a + b$, $ab - bb$, $ac + m - r$, dicuntur *compositæ*, *complexæ*, seu *polynomiæ*; & si duobus terminis constant, ut $a + b$, vel $ab - bb$, *binomiæ*; si tribus, ut $ac + m - r$, *trinomiæ*, & sic deinceps, appellantur.

VIII. Nota *Æqualitatis* est $=$, ita ut $a = b$, vel $x = 6$ significet *a* & *b* esse æquales, item valorem *x* esse 6.

IX. Sed $a > b$ indicat *a majorem* esse, quam *b*. Contra $a < b$ denotat *a minorem* esse quam *b*.

X. Proportionalitas Geometrica, seu quatuor terminorum Geometrice proportionalium ratio exprimitur per quatuor puncta hoc modo $a . b :: c . d$, nempe *a* est ad *b*, ut *c* ad *d*. Si sit continuata, exprimitur per signum $\div$. Sic $\div\, a, b, c$ indicat *a* esse ad *b*, ut idem *b* ad *c*. Item $\div\, 2, 4, 8, 16, 32$ &c.

XI.

XI. Proportionalitas vero Arithmetica exprimitur per tria puncta hoc pacto $a . b \cdot\!\cdot\!\cdot c . d$, nimirum eadem est differentia inter a & b, quæ inter c & d, ut $6 . 8 \cdot\!\cdot\!\cdot 10 . 12$.

XII. Numeri, qui quantitates analyticas præcedunt, ut $2x$, $3y$, & in trinomio $aa + 2b - 4c$ numeri 2 & 4, dicuntur *Coefficientes*. Ubi nullus est numerus, semper pro coefficiente intelligitur unitas. Sic ab intelligitur $1ab$, & $2a - b$ intelligitur $2a - 1b$.

CAPUT I.

De Calculo Integrorum.

PROPOSITIO I.

Quantitates simplices addere.

I. Si quantitates addendæ eisdem literis sint expressæ, sufficit numeros præfixos addere & numerorum summam eidem literæ præfigere. Sic ut addam a ad a, scribo $2a$; ut addam b ad $2b$, scribo $3b$ &c.

II. Si vero literæ sint diversæ, additio fit signo $+$. Sic $a + b$ exprimit summam quantitatum a & b. Ecce exempla.

a	a	c	$\frac{1}{2}\ b$
$2a$	b	d	$2\ c$
a	a	e	$3\ x$
$4a$	$2a+b$	$c+d+e$	$\frac{1}{2}b+2c+3x$

Scholium. *Ordo literarum non attenditur. Summa* 2a + b *idem valet ac*, b + 2a. *Sicuti* 10 + 5 *idem valet ac*, 5 + 10, *nempe* 15.

PROPOSITIO II.

Quantitates simplices subtrahere.

I. Si quantitates iisdem literis sint expressæ, subtrahuntur numeri præfixi & residuum eidem literæ præponitur. Ut subtraham $2a$ ex $5a$, scribo pro residuo $3a$. Similiter sublato b ex $2b$, remanet b. Item sublato x ab x, remanet 0, seu nihil.

II. Si quantitates diversis literis expressæ fuerint, subtractio fit signo —. Ut subtraham a ex b, scribo $b - a$. Similiter sublatis $2a$ ex $3y$, residuum erit $3y - 2a$. Exempla.

$5a$	$5b$	a	$3c$
$3a$	$2b$	b	$4z$
$2a$	$3b$	$a - b$	$3c - 4z$

Schol. *Intelligenti prima Arithmeticæ communis elementa nulla difficultas esse potest de duabus præcedentibus propositionibus. Nam si ponatur* a = 5, *erit summa* 4a = 5 + 5 + 5 + 5, *hoc est* 4a = 20, *ut in primo exemplo. Si ponatur* a = 10 *&* b = 4, *erit summa* 2a + b = 20 + 4, *hoc est* 24, *ut in secundo exemplo. Similiter si ponatur* a = 10 *& subtrahenda sint* 3a *ex* 5a, *nempe* 30 *ex* 50, *residuum erit* 2a = 20. *Tandem si ponatur* a = 20 *&*

b =

$b = 15$, *erit* $a - b = 20 - 15$, *hoc est* 5, *ut ex primo & tertio subtractionis exemplo habetur*.

PROPOSITIO III.

Quantitates simplices multiplicare.

I. MUltiplicatio fit per simplicem literarum conjunctionem, nullo interposito signo. Sic *ab*, vel *ba* (ordo literarum non attenditur) significat productum *a* in *b*, vel *b* in *a*; unde si ponatur $a = 5$ & $b = 6$, erit $ab = 30$.

II. Quantitates multiplicandæ *a* & *b* dicuntur *factores* & *ab factum*. Si factoribus præfixi sint numeri, hi inter se multiplicentur, ut in communi Arithmetica, eorumque productum præmittatur facto litterarum. Ecce exempla:

ab	ac	$2cd$	$\frac{1}{2}afg$
c	b	$3a$	$\frac{1}{3}cm$
abc	abc	$6acd$	$\frac{1}{6}acfgm$

SCHOL. *Multiplicatio aliquando indicatur per Crucem, quam S. Andreæ vulgo vocant. Sic* $a \times b$ *indicat factum* a *in* b, *seu* ab. *Ceterum cum in omni multiplicatione sit unitas ad factorem unum, ut alter ad productum, erit productum quarta proportionalis, hoc est* $1 . a :: b . ab$, *proinde optime exprimitur per* ab.

PRO-

PROPOSITIO IV.

Quantitates ſimplices dividere.

I. Regula eſt, ex dividendo dele diviſorem & habebis quotum. Sic ad dividendum ab per a, deleto a ex dividendo, reſtat b quotus.

II. Si adſint coefficientes, hos ſeorſim divides, ut in vulgari Arithmetica. Sic dividendo $6ab$ per $3b$, quotus erit $2a$; & $\frac{4ax}{2x} = 2a$.

III. Quod ſi dividendus & diviſor nullam habeant literam communem, tunc diviſio exprimitur per modum fractionis, ut $\frac{ab}{c}$, $\frac{ax}{n}$, $\frac{2a}{3c}$ &c.

Schol. *Diviſio diſſolvit id, quod fuit multiplicatione compoſitum, proinde diviſor per quotientem multiplicatus reſtituit ipſum dividendum. Nam multiplicato quoto* b *per diviſorem* a, *reſtituitur dividendum* ab. *Atque hinc apparet, cur in diviſione deleto diviſore ex quantitate dividenda, habeatur quotus. Nam quotus & diviſor ſunt duo factores, qui producunt* ab, *& eliſo diviſore* a, *remanet alter ex factoribus pro quoto, nempe* b.

L E M M A.

Quantitates complexas ad ſimpliciores expreſſiones reducere.

I. Si quantitates iiſdem literis notatæ habent idem ſignum +, aut —, addantur earum coefficientes & præponatur ſummæ idem ſignum. Sit reducenda ad ſimpli-

ſimpliciorem expreſſionem quantitas $x + 3ab + 2x + 2ab$, additis coefficientibus terminorum ſimilium, reducitur ad $3x + 5ab$. Simili ratione quantitas $y + 2xy - 2d + xy - d$, erit $y + 3xy - 3d$.

II. Cum vero quantitates iiſdem literis expreſſæ habent ſigna diverſa, ſubducendus eſt minor coefficiens a majori, & reſiduo præponendum ſignum majoris. Sit quantitas $4ac + bc - 3bc$, ſubducto $+ bc$ ex $3bc$, & præpoſito ſigno $-$ quantitatis majoris, erit per reductionem $4ac - 2bc$. Pariter $2ax - ax + 4b - 3b$, erit $ax + b$.

PROPOSITIO V.

Quantitates compoſitas addere.

I. SI quantitates eiſdem literis notatæ habent idem ſignum $+$, aut $-$, adduntur ſimul, illo eodem præfixo ſigno.

$-a + 3b$	$a - x$	$\frac{1}{2}cb + 2b - 3$
$-a + 2b$	$3a - 2x$	$\frac{1}{2}cb + 3b - 4$
$-2a + 5b$	$4a - 3x$	$cb + 5b - 7$

II. Quod ſi eiſdem literis notatæ habent diverſa ſigna, minor quantitas a majori ſubtrahitur, & reſiduo apponitur ſignum majoris.

$3a + 5b$	$a + d$	$ab - 2ac - 5$
$2a - 2b$	$a - 4d$	$ab + 6ac + 2$
$5a + 3b$	$2a - 3d$	$2ab + 4ac - 3$

COROLL.

Coroll. *Manifestum est, ad addendum* 3a + 5b *ad* 2a — 2b, *ut in primo exemplo, scribi posse unam quantitatem post aliam, nempe* 3a + 5b + 2a — 2b, *& deinde reduci* per Lem. *ad simpliciorem expressionem; habebitur enim eodem modo* 5a + 3b, *& sic de aliis.*

PROPOSITIO VI.

Quantitates compositas subtrahere.

Quantitas subducenda additur, mutatis signis, quantitati, ex qua subduci debet. Subducenda sit ex quantitate $x + b - c$ quantitas $a + y - d + 1$, erit differentia, seu residuum $x + b - c - a - y + d - 1$. Similiter in exemplis, quæ sequuntur, intelligantur mutata signa in quantitate subtrahenda, erit facile habere residuum

$3a + 2b$	$2x - b$	$4c - 3x - 2$
$a + 5b$	$x - 3b$	$2c - 2x + 5$
$2a - 3b$	$x + 2b$	$2c - x - 7$

Coroll. *Patet subtractionem quantitatum compositarum degenerare in additionem. Nam ad subtrahendam ex* 3a + 2b *quantitatem* a + 5b, *mutatis signis in* a + 5b, *erit* — a — 5b. *Habemus ergo* 3a + 2b — a — 5b, *quæ* per Lem. *ad simpliciorem expressionem redacta dant residuum* 2a — 3b, *ut in primo exemplo. Habeat enim quis aureos* 100, *debeat autem alteri aureos* 100 + 50; *mutatis*

tatis signis in summa subducenda, habebit ille aureos $+100-100-50$, *hoc est* -50 *aureos de ære alieno.*

PROPOSITIO VII.

Quantitates complexas multiplicare.

DUcantur singuli unius quantitatis complexæ termini in singulos alterius terminos eo modo, quo factum est in multiplicatione simplicium; quod commode fit incipiendo a sinistra & pergendo ad dexteram.

Pro signis hæc regula observetur, *eadem signa* faciunt $+$, *diversa* autem $-$.

Multiplicanda sint inter se A & B, dico factum esse E, resultans ex factis C & D simul additis. Nam primus terminus a quantitatis B multiplicans singulos terminos quantitatis A producit C; & secundus terminus $-x$ quantitatis ejusdem B multiplicans pariter singulos terminos quantitatis A, producit D, ergo si facta C & D addantur *per Prop.* v. obtinebitur factum E. Quod &c.

EXEMPL. I.

A	$a+b-c$
B	$a-x$
C	$aa+ab-ac$
D	$-ax-bx+cx$
E	$aa+ab-ac-ax-bx+cx$

EXEMPL. II.

$$\begin{array}{r} 2a - 3bc + 1 \\ 3a - 2b \\ \hline 6aa - 9abc + 3a \\ - 4ab + 6bbc - 2b \\ \hline 6aa - 9abc + 3a - 4ab + 6bbc - 2b \end{array}$$

EXEMPL. III.

$$\begin{array}{r} x + ax - 2b + 3 \\ x - \frac{1}{2}a + 2b \\ \hline xx + axx - 2bx + 3x \\ - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}aax + ab - \frac{3}{2}a \\ + 2bx + 2abx - 4bb + 6b \\ \hline xx + axx + 3x - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}aax + ab \\ - \frac{3}{2}a + 2abx - 4bb + 6b. \end{array}$$

Demonstr. signorum regula. Omnis multiplicatio fit per numeros. Nam quantitatis per quantitatem multiplicatio non est nisi iterata ejusdem quantitatis additio; & per multiplicationis productum aliud non exprimitur, nisi quoties sumpta fuerit aliqua quantitas. Sic productum $6a$, quod oritur ex 3 in $2a$, exprimit bis ter, seu sexies a esse sumptum; proinde ducendo $+ 2a$ in $+ 3$, oritur $6a$, de quo nemini dubium est.

At vero ducendo + *in* —, *vel* — *in* +, *oritur* —. Nam multiplicare per numerum negativum est tollere, seu negare positivum, sicuti multiplicare per numerum positivum est aliquid ponere. Itaque ducendo $+ 3a$ in $- 2$, fit

fit — $6a$, quia bis ter, ſeu ſexies negatur quantitas poſitiva a. Quod erat ſecundum.

Denique — *in* — *dat* +. Nam in hoc caſu quantitas negativa per numerum pariter negativum tollitur & aliquid ponitur. Sicuti tollere debitum eſt ipſum ſolvere, ponendo aliquid; unde ducendo — $3a$ in — 2, fit + $6a$, quia dum quantitas negativa bis ter negatur, bis ter aliquid ponitur. Ergo &c.

Vel ſic, — *in* — *dat* +. Nam multiplicando quantitatem negativam per aliam negativam v. g. — $3a$ X — $2b$, illa toties ſubtrahitur, quot ſunt in altera unitates. Negatio enim ſubtractionem importat, ſicuti affirmatio additionem. Hæc autem ſubtractio cum ſit ſubtractio quantitatis negativæ, ſignum negativum mutari debet in affirmativum *per Prop.* VI. proinde reſiduum ſubtractionis (ſeu productum multiplicationis) erit affirmativum. Sic — $3a$ in — $2b$ dat + $6ab$. Nam quantitas — $3a$ bis ſubtrahi debet, quot ſcilicet ſunt unitates in altera quantitate negativa — $2b$; & mutato ſigno negativo in affirmativum, habetur + $6ab$ multiplicationis productum.

SCHOL. I. *Hanc doctrinam ſi quis nunc penitus non percipiat, parum refert, percipiet poſtea. Interim ultra progrediatur.*

SCHOL. II. *Multiplicatio compoſitarum quantitatum exprimitur quoque aliquando per ſignum* X, *ducta ſupra factores compoſitos linea ſic*, $\overline{a + b - c} \times \overline{a - x}$. *Vel factores ipſi includuntur parentheſi, ut inſigni calculi commodo excogitavit Leibnitius, quo Analyſtæ recentiores utuntur, nempe* (a + b — c) (a — x. *Similiter* (a + b — c) x, *deſignat productum* ax + bx — cx.

PROPOSITIO VIII.

Quantitates complexas dividere.

Hic etiam eadem signa ponunt $+$, diversa $-$. Neque refert utrum a sinistra, an vero a dextera initium ducas. Operatio eodem modo peragitur ac in vulgari Arithmetica. Exempla rem declarant. Dividendum est polynomium A per polynomium B, dico quotum esse C.

Exemplum I.

$B\ a+b)$	$A\ an+bn$	$-ar-br$	$+a+b$	C
	$-an-bn$	$+ar+br$	$-a-b$	$+n$
				$-r$
	o	o	o	$+1$

Divido an per a & pono ad dexteram in C quotum $+n$, qui habetur *per Prop.* IV. Per hunc multiplico divisorem $a+b$, ejusque productum $an+bn$ (mutatis signis *per Prop.* VI.) subduco ex dividendo A & fit o. Deinde eodem modo per a divido $-ar$, & pono in C quotum $-r$, inventum *per Prop.* IV. per quem multiplicato divisore $a+b$, oritur productum $-ar-br$ subducendum (mutatis signis) ex dividendo $-ar-br$ & habetur o. Demum dividendo a per a, quotus est 1, per quem multiplico divisorem $a+b$, & productum $a+b$. (mutatis signis) subtraho ex dividendo, & nihil remanet. Quotus ergo C est $n-r+1$, per quem si multiplicetur divisor $a+b$, restituitur dividendum A.

Exem-

EXEMPLUM II.

Dividendum eſt polynomium B per polynomium C, dico quotum eſſe D.

$$
\begin{array}{llc|l}
C\ 3a - 1) & B\ 6aa + 3ab + 13a - b - 5 & & D \\
 & \quad -6aa \qquad\quad + 2a & & +2a \\
 & \quad\ \ 0 \qquad\qquad + 15a & & +b \\
 & & & +5 \\
\text{Reſid. } E & +3ab + 15a - b - 5 & & \\
 & -3ab \qquad\quad + b & & \\
 & \quad\ 0 \qquad\qquad\ 0 & & \\
\text{Reſid. } F & +15a - 5 & & \\
 & -15a + 5 & & \\
 & \qquad 0 & &
\end{array}
$$

Dividendo $6aa$ per $3a$ oritur quotus $2a$ *per Prop.* IV. quem pono in D, & per hunc multiplicans diviſorem C $3a - 1$, habeo productum $6aa - 2a$, ſubducendum (mutatis ſignis) ex dividendo; quo facto habetur reſiduum E. Divido igitur $3ab$ per $3a$, quotus eſt b ponendus in D, per quem multiplicato diviſore C, oritur productum $3ab - b$, ſubtrahendum (mutatis ſignis) ex dividendo, ſeu reſiduo E: quo facto, habetur reſiduum $F + 15a - 5$ loco dividendi. Diviſo itaque $15a$ per $3a$, fit quotus 5, per quem multiplicato diviſore C, & producto $15a - 5$ ſubtracto ex reſiduo F, nihil remanet. Eſt ergo quotus D $2a + b + 5$, per quem ſi multiplicetur diviſor C, oritur polynomium B.

EXEM-

Exemplum III.

Dividenda ſit quantitas *A* per quantitatem *B*, dico quotum eſſe *C*.

$$
\begin{array}{llllr|l}
B\ x-2\ ) & & A & xxx+4x-17 & & C \\
 & & & -xxx+2xx & & +xx \\
 & & & \overline{\quad\ } & & +2x \\
 & & & 0 & & +8 \\
 & \text{Reſid.} & D & +2xx+4x-17 & & \\
 & & & -2xx+4x & & \\
 & & & \overline{\qquad\qquad} & & \\
 & \text{Reſid.} & E & 0+8x-17 & & \\
 & & & -8x+16 & & \\
 & & & \overline{\qquad\qquad} & & \\
 & & & 0-1 & &
\end{array}
$$

Eſt ergo quotus $C\ xx+2x+8-\frac{1}{x-2}$

Coroll. *Si facta diviſione aliquid remanet, illud ponitur poſt quotientem cum ſigno* $+$, *vel* $-$, *quo afficitur, ut in hoc tertio exemplo* $-\frac{1}{x-2}$ *ſupponendo illi diviſorem, ut fit in communi Arithmetica.*

Schol. I. *Liberum eſt ſumere ex diviſore compoſito, quam libuerit, literam ad dividendum; quæ tamen ſemel aſſumpta ſemper adhibetur, nec mutari poteſt. Sic in primo exemplo pro litera* a *ſumi potuiſſet litera* b. *In ſecundo exemplo loco* 3a, *aſſumi poterat in diviſorem quantitas* -1, *ſemper enim idem quotus obtinetur.*

Schol. II. *Sæpe numeri, qui præcedunt terminos dividendi, aut diviſoris, impediunt, quo minus fieri poſſit diviſio. Tunc diviſio exprimitur per modum fractionis, ut ſi divi-*

dividenda sit 3ab + c *per* 2a — c, *erit quotus* $\frac{3ab + c}{2a - c}$.
Idem fit cum dividendus & divisor nullam habent literam communem; ut $\frac{ad - ac}{d - r}$, *item* $\frac{dx - dc}{a + x}$ &c.

SCHOL. III. *Aliquando etiam divisio quantitatum compositarum fit includendo divisorem & dividendum parenthesi, & inter illos apponendo duo puncta; ut* (a + b) : c *indicat* a + b *divisum esse per* c. *Similiter* (2ax — ab) : (a — c) *designat polynomium* 2ax — ab *divisum esse per polynomium* a — c, *quod summo Leibnitii ingenio pariter debemus.*

PROPOSITIO IX.

Datæ quantitatis divisores omnes invenire.

I. ESto numerus 150, cujus singuli divisores quærun-tur. Divide illum per 2 & quotum 75 pone sub ipso numero dividendo, ut in *A*, divisorem autem 2 in *B*. Deinde quia totus 75 dividi non potest per 2 sine residuo, divide illum per 3 & pone quotum 25 in *A*, divisorem autem in *B*. Postea quotum 25 (cum adæquate dividi nequeat per 3) divide per 5 & quotum pone in *A*, divisorem in *B*. Demum quotus 5 divisus per 5, dat quotum 1, ponendum in *A*, posito divisore 5 in *B*. Habentur jam omnes divisores simplices dati numeri, hoc est 2, 3, 5, 5.

Ut habeantur divisores compositi, multiplica primum divisorem 2 per secundum 3, & pone productum 6 ad dexte-

dexteram ejusdem secundi divisoris 3. Deinde duo primi divisores & productum 6 multiplicentur per tertium divisorem 5, & producta 10, 15, 30 ponantur ad dexteram ipsius divisoris 5. Demum multiplicentur per quartum divisorem 5 omnes numeri jam inventi, & habebis 25, 50, 75, 150, qui juxta ipsum ultimum divisorem apponuntur, ut infra patet. Ex compositis idem numerus bis non ponitur.

A	*B*
150	2.
75	3. 6.
25	5. 10. 15. 30.
5	5. 25. 50. 75. 150.
1	

II. Quærantur omnes divisores numeri *M* 120. Dispone, ut in superiori exemplo factum est, omnes divisores simplices infra *N*, & omnes quotos sub dato numero infra *M*. Deinde duc primum divisorem in secundum, & productum pone ad latus secundi divisoris. Postea duo primi divisores & productum modo inventum ducantur in tertium divisorem, & singula producta, unum post aliud, ponantur ad latus ipsius tertii divisoris, & sic deinceps operando inveniuntur omnes dati numeri divisores, ut infra apparet.

M	*N*
120	2.
60	2. 4.
30	2. 8.
15	3. 6. 12. 24.
5	5. 10. 20. 40. 15. 30. 60. 120.
1	

III. Sit

III. Sit quantitas $aabcd$, cujus omnes divisores quærun-tur. Inveniantur primo omnes divisores simplices a, a, b, c, d, qui ponantur infra B, singuli autem quoti infra A. Deinde ducendo divisorem primum in secundum, habetur productum aa, quod ponitur ad latus secundi divisoris a. Similiter ducendo tertium divisorem b in omnes quantitates supra existentes, habentur producta ab, & aab, quæ scribuntur ad latus ipsius divisoris b, & sic deinceps prosequendo habentur omnes divisores quæsiti, ut infra.

A	B						
$aabcd$	a.						
$abcd$	a.	aa.					
bcd	b.	ab.	aab.				
cd	c.	ac.	aac.	bc.	abc.	$aabc$.	
d	d.	ad.	aad.	bd.	abd.	$aabd$.	dc.
1		acd.	$aacd$.	bcd.	$abcd$.	$aabcd$.	

IV. Quæruntur omnes divisores quantitatis $2a+bb-4ac$. Dividatur primo per 2, deinde diviso quoto $abb - 2ac$ per a, remanet quotus indivisibilis $bb - 2c$. Sunt ergo divisores primi 2, a, & $bb - 2c$, quibus multiplicatis ordine jam supra explicato, habentur omnes divisores, scilicet

$2abb - 4ac$	2.			
$abb - 2ac$	a.	$2a$.		
$bb - 2c$	$bb - 2c$.	$2bb - 4c$.	$abb - 2ac$.	
1			$2abb - 4ac$.	

COROLL. *Hinc patet, quotum indivisibilem, ut in hoc tertio exemplo* bb — 2c, *reponi debere inter divisores. Nam quælibet quantitas sui met divisor est. Unitas quoque primus omnium divisor intelligitur.*

Schol. I. *Divisoribus primis, ut supra, inventis, si singulos binos, ternos, quaternos &c. inter se ducas, habebis cum* Newtono *omnes divisores compositos. Sic numeri* 60 *divisores primi sunt* per hanc Prop. 2 . 2 . 3 . 5. *Ex binis compositi sunt* 4. 6. 10. 15; *ex ternis* 12. 20. 30; *ex quaternis* 60; *qui omnes conficiunt summam divisorum* 12.

Schol. II. *Quod si inquiratur tantum summa divisorum dati numeri ex. gr. quot divisores habeat numerus* 60, *incluso quoque divisore* 1; *inventis divisoribus primis, ut supra, sub singulis eorum ponitur* 2, *si sint inæquales: sub binis æqualibus ponitur* 3; *sub ternis æqualibus* 4, *& sic deinceps, eorumque productum dat summam omnium divisorum. Primo divisori* 1 *nihil subscribitur, quia* 1 *in reliquas quantitates ducta nihil novi producit.*

Divisores primi numeri 60 *sunt* 2 . 2 . 3 . 5
Pone sub illis numeros, nempe 3 × 2 × 2
Quorum productum 12 *dat summam quæsitam. Similiter primi divisores numeri* 2310 *sunt* 2 . 3 . 5 . 7 . 11.
Sub singulis, quia sunt inæquales, pono 2, 2 × 2 × 2 × 2 × 2
quorum productum 32 *dat summam omnium divisorum numeri* 2310. *Ratio est, quia ubi plures sunt quantitates diversæ, si duæ (omissa* 1) *inter se ducantur, habentur quatuor divisores, in quibus comprehenditur* 1, *reliquæ vero continuo duplicant ipsam divisorum summam. Sit productum* abc, *cujus divisores primi sunt* 1 . a . b . c. *Subscribe singulis (omisso divisore primo* 1) *numerum* 2, *eorum productum* 2 × 2 × 2 = 8 *dat numerum omnium divisorum. Nam ducto* a × b *fiunt quatuor divisores nempe* 1 . a . b . ab, *qui deinde duplicantur per quantitatem* c *in singulos ductam, & fiunt* 8 *scilicet* c . ac . bc . abc.

Quod

Quod si productum sit aabc, *cujus primi divisores sunt* 1.a.a.b.c, *divisorum summa erit* 12, *hoc est* $3 \times 2 \times 2 = 12$, *ut in primo exemplo. Nam quantitates similes* a, a *inter se ductæ, non quatuor, sed tres duntaxat divisores efficiunt, nempe* 1.a.aa, *qui duplicati per* b *fiunt* 6, *&* *iterum duplicati per* c *fiunt* 12.

CAPUT II.

De Calculo Fractorum.

OMNIA fere peraguntur ut in communi Arithmetica. Ne qua tamen tyroni difficultas in hoc calculi genere suboriatur, quæ præcipua sunt, & ad præsentem usum magis faciunt, breviter illustrabimus; adjecta in fine appendice de Calculo Decimali.

AXIOMATA.

1. INtegra quantitas in fractionem degenerat, si loco denominatoris ponatur unitas, ut $\frac{ab}{1}$, $\frac{a+b}{1}$ &c.

2. Integrum in fractionem dati denominatoris convertitur, si multiplicetur per denominatorem datum & producto supponatur ipsemet denominator, ut si a reducenda sit ad fractionem denominatoris b, erit $\frac{ab}{b}$. Item x si reducenda sit ad fractionem dati denominatoris $a+b$, erit $\frac{ax+bx}{a+b}$.

3. Multiplicatis, aut divisis per eandem quantitatem tam numeratore, quam denominatore fractionis, fractio valorem non mutat. Sic multiplicando $\frac{a}{b}$ per c fit $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$. Item dividendo $\frac{bb}{bc}$ per b, fit $\frac{b}{c}$; & $\frac{ax + bx}{a + b}$ divisa per $a + b$, fit $\frac{x}{1}$.

4. Ut multiplicetur fractio per suum denominatorem, satis est delere ipsum denominatorem. Sic ad multiplicandum $\frac{ax}{c}$ per c, satis est scribere ax. Similiter $\frac{bc}{a-b}$ multiplicatum per $a - b$ erit bc; & $\frac{a}{2x}$ multiplicatum per $2x$, erit a; nam $\frac{2ax}{2x} = a$ *per* 3. *Axioma*.

PROPOSITIO I.

Integrum cum fractione ad unam fractionem reducere.

Sit quantitas $a + \frac{bc}{n}$ reducenda ad unam fractionem: Multiplicetur quantitas integra a per denominatorem fractionis n, fiet fractio quæsita $\frac{an + bc}{n}$. Eadem ratione $\frac{aa}{c} - b$, erit $\frac{aa - bc}{c}$. Ratio patet *ex* 2. *Axiom.*

PRO-

PROPOSITIO II.

Fractiones ad simpliciorem expressionem reducere.

I. Sit fractio $\frac{aab}{ac}$ reducenda ad simpliciorem. Dividatur tam numerator, quam denominator per divisorem communem, nempe per a; quoti hinc inde orti dant fractionem simpliciorem & priori æqualem *per* 3. *Axioma*, scilicet $\frac{ab}{c}$. Eadem ratione $\frac{2abc}{8acd}$ erit $\frac{1b}{4d}$.

II. Quod si communis divisor non ita facile in oculos incurrat, ut in quantitatibus valde compositis contingere solet; tunc inveniantur *per Prop.* IX. *Cap.* I. omnes tam numeratoris, quam denominatoris divisores, ex quibus ille pro communi divisore seligatur, qui fuerit numeratori & denominatori communis. Sit fractio reducenda $\frac{aac+abc}{aa-bb}$, omnes quidem numeratoris divisores sunt a, c, $a+b$; denominatoris autem sunt $a-b$ & $a+b$. Divisor ergo utrique communis $a+b$ est divisor quæsitus, per quem dividendo utrunque terminum datæ fractionis $\frac{aac+abc}{aa-bb}$, fit $\frac{ac}{a-b}$. Eadem ratione $\frac{aac-aad}{cd-dd}$ fit $\frac{aa}{d}$, dividendo per $c-d$ divisorem communem inventum ut supra *per Propos.* IX. *Cap.* I.

SCHOL. *Alias regulas inveniendi divisorem communem, utpote difficiliores, afferre, non putamus esse hujus loci.*

PRO-

PROPOSITIO III.

Fractiones ad eandem denominationem reducere.

I. Sint duæ fractiones reducendæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Ducantur duo termini fractionis primæ in denominatorem alterius, nempe $\frac{a}{b}$ in d, & duo termini fractionis secundæ $\frac{c}{d}$ in b denominatorem primæ, seu (quod idem est) multiplicentur per crucem, ut numeri fracti; fient $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{cb}{bd}$ ejusdem nominis & æquales prioribus ex 3. *Axiom.*

II. Sint reducendæ plures; ducantur ambo termini cujusque fractionis in productum, quod ex ceterarum fractionum denominatoribus resultat, fient fractiones quæsitæ. Sint $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ duc terminos primæ $\frac{a}{b}$ in df, deinde terminos secundæ $\frac{c}{d}$ in bf, item terminos tertiæ $\frac{e}{f}$ in bd, habebis $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{cbf}{bdf}$, $\frac{ebd}{bdf}$. Ratio sequitur ex eod. 3. *Axiom.*

Coroll. *Quando denominator unius fractionis exacte dividit denominatorem alterius fractionis, tunc illæ fractiones ad idem nomen satis commode reducuntur multiplicando per illum quotum numeratorem & denominatorem fractionis illius, cujus denominator fuit divisor. Sint reducendæ* $\frac{ab}{cd}$ *&* $\frac{ef}{c}$ *quia denominator* c *dividit exacte deno-*

denominatorem cd, *multiplico per quotum* d *utrunque terminum fractionis* $\frac{ef}{c}$, *& fiunt* $\frac{ab}{cd}$ *&* $\frac{edf}{cd}$ *ejusdem nominis*. *Ut si reducendæ sint* $\frac{5}{8}$ *&* $\frac{3}{4}$, *quia* 4 *dividit exacte* 8, *multiplicando per quotum* 2 *terminum utrunque fractionis* $\frac{3}{4}$, *erunt* $\frac{5}{8}$ *&* $\frac{6}{8}$ *ejusdem nominis, ut patet*.

PROPOSITIO IV.

Additio & subtractio fractionum.

I. ADdendæ sunt fractiones $\frac{a}{c}$ & $\frac{b}{c}$, summa erit $\frac{a+b}{c}$. Eadem ratione $\frac{ad}{a+b}$ & $\frac{cf}{a+b}$ simul additæ conficiunt summam $\frac{ad+cf}{a+b}$.

Si fuerint diversæ denominationis, ut $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$; reducantur ad eandem *per Prop.* III. fient $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{cd}{bd}$, earumque summa $\frac{ad+cb}{bd}$.

II. Quod si addenda sint integra cum fractis $a+\frac{ab}{c}$ & $b-\frac{ac}{b}$, addi possunt integra integris $a+b$ & fractiones fractionibus $\frac{ab}{c}$ & $-\frac{ac}{b}$ (quæ prius ad eandem denominationem reducendæ sunt *per Prop.* III.) eritque summa quæsita $a+b+\frac{abb-acc}{bc}$.

III. Vel

III. Vel possunt integra ad fractionem sibi annexam reduci *per Prop.* 1. nempe $\frac{ac+ab}{c}$ & $\frac{bb-ac}{b}$, quæ redacta ad eandem denominationem *per Prop.* III. erunt $\frac{abc+abb}{bc}$ & $\frac{bbc-acc}{bc}$, earumque summa $\frac{abc+abb+bbc-acc}{bc}$.

IV. Si vero subtrahenda sit $\frac{a}{b}$ ex $\frac{c}{b}$, differentia erit $\frac{c-a}{b}$. Si sint diversæ denominationis, semper ad eandem prius reduci debent. Sic ut $\frac{a}{b}$ ex $\frac{c}{d}$ subtrahi possit, reducuntur ad eandem denominationem *per Propos.* III. eritque differentia quæsita $\frac{bc-ad}{bd}$.

V. Quod si ex integra quantitate x subduci debeat fractio $\frac{aa-ab}{a+b}$; reducta prius x ad fractionem ejusdem denominatoris per 2. *Axioma*, habetur $\frac{ax+bx}{a+b}$, ex qua subducta $\frac{aa-ab}{a+b}$, erit residuum $\frac{ax+bx-aa+ab}{a+b}$. Similiter si subtrahenda sit $b+\frac{cc}{b+d}$ ex $a+b$, redacta prima quantitate ad unam fractionem *per Propos.* 1. & altera ad fractionem ejusdem nominis cum prima *per Axioma* 2. erit residuum $\frac{ab+ad-cc}{b+d}$, hoc est $a-\frac{cc}{b+d}$ *per Prop.* VIII. *Cap.* I.

Schol.

SCHOL. *Cum numerator fractionis pluribus constat terminis, juvat aliquando fractionem illam in plures dividere. Sic* $\frac{ab - cd + dd}{a - b}$ *dividi potest in* $\frac{ab}{a-b}, \frac{-cd}{a-b}, \frac{+dd}{a-b}$. *Hoc autem præsertim fit, ubi aliqui termini numeratoris sunt per denominatorem divisibiles, alii vero non. Sit enim* $\frac{aa - 3ab - bb}{a + b}$ *dividantur in* $\frac{aa - bb}{a + b}$ & $\frac{-3ab}{a+b}$, *quia vero* $\frac{aa - bb}{a + b} = a - b$ per Prop. VIII. Cap. I. *erit fractio proposita* $a - b - \frac{3ab}{a + b}$.

PROPOSITIO V.

Fractiones multiplicare.

I. SInt multiplicandæ duæ fractiones $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, ducantur inter se numeratores, & denominatores pariter inter se, fiet productum quæsitum $\frac{ac}{bd}$. Eadem ratione fractio $\frac{a-b}{c}$ multiplicata per $\frac{ab}{x}$ producit $\frac{aab - abb}{cx}$.

II. Si multiplicanda sit fractio $\frac{a}{b}$ per integrum c, satis est numeratorem in integrum ducere, eritque productum $\frac{ac}{b}$. Nam integro supponitur unitas, & illud ad fractionem esse redactum, nempe $\frac{c}{1}$ *per* 1. *Axiom.*

III. Vel dividatur (siquidem exacte fieri possit) denominator fracti per integrum, habebitur productum. Sit $\frac{a}{bc}$ multiplicanda per c, divido bc per c, quotus $\frac{a}{b}$ dat productum quæsitum; nam $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$, ut patet. Item sit multiplicanda $\frac{ab - cd}{ac - ad}$ per $c - d$, divido $ac - ad$ per $c - d$, quotus est a, & productum erit $\frac{ab - cd}{a}$.

IV. Si ducenda sit $a + \frac{aa}{b}$ in $b - \frac{cc}{d}$, reducantur integra ad fractiones sibi annexas *per Propos.* 1. nempe $\frac{ab + aa}{b}$ & $\frac{bd - cc}{d}$, eritque earum productum $\frac{\overline{ab + aa} \times \overline{bd - cc}}{bd}$ hoc est $\frac{abbd + aabd - abcc - aacc}{bd}$ seu $ab + aa - \frac{acc}{d} - \frac{aacc}{bd}$ *per Schol. Prop. præc.*

V. Fieri etiam potest multiplicatio non reductis integris in fractos, ducendo $a \times b$ & habetur ab, tum $\frac{aa}{b} \times b$, & oritur $\frac{aab}{b}$ &c.

$$\begin{array}{l} a + \frac{aa}{b} \\ b - \frac{cc}{d} \\ \hline ab + \frac{aab}{b} - \frac{acc}{d} - \frac{aacc}{bd} \\ \hline ab + aa - \frac{acc}{d} - \frac{aacc}{bd} \end{array}$$ ut supra.

Coroll.

CORÔLL. *Si fractio multiplicetur per suum denominatorem, productum est ipsius numerator. Sic* $\frac{aa}{a+b} \times a+b$ *dat* aa per 4. Axioma.

SCHOL. *Factum ex integro in fractum, ut* $\frac{ax}{b}$, *quod oritur ex* $\frac{a}{b} \times x$; *vel* $\frac{2ac}{3}$, *quod oritur ex* $\frac{2}{3} \times ac$, *exprimi etiam potest seorsum hoc pacto* $\frac{a}{b}x$ & $\frac{2}{3}ac$, *quod notetur.*

PROPOSITIO VI.

Fractiones dividere.

I. UT dividatur $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{b}$, eliso communi denominatore, divide a per c, erit quotus $\frac{a}{c}$. Eadem ratione $\frac{1aab}{2c}$ diviso per $\frac{2ad}{3c}$, quotus erit $\frac{3ab}{4d}$. Nam in divisione fractionum omnia fiunt, ut in multiplicatione, inverso tamen denominatore minutiæ dividentis; proinde dividendo $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{b}$, inverso divisore, factaque multiplicatione, quam docuimus in *præc. Prop.*, erit quotus $\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}$, ut in primo exemplo.

II. Si denominatores diversi fuerint, est eadem omnino regula. Sic $\frac{a}{b}$ divisa per $\frac{c}{d}$ dat quotum $\frac{ad}{bc}$. Pari

 ratio-

ratione $\frac{a-b}{c+d}$ divisa per $\frac{n}{a}$ dat quotum $\frac{aa-ab}{nc+nd}$.

III. Si fractio $\frac{ac}{b}$ dividenda sit per integrum c, divide [si fieri potest, ut in hoc exemplo] numeratorem ac per c, quotus quæsitus erit $\frac{a}{b}$. Similiter $\frac{ad-cd}{a-b}$ dividenda sit per $a-c$, divido $ad-cd$ per ipsum $a-c$, unde habetur d, & quotus quæsitus erit $\frac{d}{a-b}$.

IV. Vel si numerator fractionis dividendæ divisibilis non est, multiplicetur denominator ejusdem fractionis per integrum. Sit $\frac{ac}{b}$ dividenda per d, quia ac non est divisibilis per d, multiplico per ipsum d denominatorem, & habetur quotus quæsitus $\frac{ac}{bd}$. Eadem ratione $\frac{ad-cd}{a-b}$ divisa per $a+b$, dat quotum $\frac{ad-cd}{aa-bb}$, multiplicando scilicet $a-b \times a+b$. Ratio patet, si divisori integro supposita intelligatur unitas, nempe $\frac{a+b}{1}$ *per* 1. *Axiom.* quo inverso, fit multiplicatio, & producitur quotus, ut supra.

V. Si dividi oporteat $a+\frac{aa}{b}$ per $b-\frac{cc}{d}$, reducantur integri ad fractos sibi adhærentes per *Propos.* 1. deinde $\frac{ab+aa}{b}$ dividatur per $\frac{bd-cc}{d}$, invertendo divisorem,

rem, & multiplicando modo supra explicato, erit quotus $\frac{abd + aad}{bbd - bcc}$.

SCHOL. *Si fractiones dividendæ sint valde compositæ, juvabit ad majorem facilitatem eas, antequam fiat divisio, ad terminos simpliciores reducere* per Prop. 11. hujus.

PROPOSITIO VII.

Polynomium cum fractionibus dividere.

I. Sit polynomium *A* cum fractionibus sibi annexis, quod dividendum sit per polynomium *B* pariter cum fractionibus, dico quotientem esse $Q = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}a$.

$$A \quad \frac{1}{3}axx - \frac{1}{2}bxx + \frac{2}{3}abx - \frac{1}{8}aax + \frac{3}{16}abx - \frac{1}{4}aab$$
$$\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$B \quad \frac{1}{2}ax - \frac{3}{4}bx + ab$$
$$Q \quad \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}a$$

Nam dividendo $\frac{1}{3}axx$ per $\frac{1}{2}ax$, quotus erit $\frac{2}{3}x$ *per Propos. præc.* quem pono in Q, & statim deletur $\frac{1}{3}axx$ supponendo illi zerum. Per quotum inventum multiplico divisoris *B* residuum, hoc est $-\frac{3}{4}bx + ab$; & primo quidem $-\frac{3}{4}bx \times \frac{2}{3}x = -\frac{6}{12}bxx = -\frac{1}{2}bxx$, quod (mutato signo) subtrahitur ex $-\frac{1}{2}bxx$, cui proinde suppono zerum. Deinde $\frac{2}{3}x \times ab = \frac{2}{3}abx$, quod pariter subtrahitur ex $\frac{2}{3}abx$, supposito zero.

Rur-

Rursus per eundem divisorem $\frac{1}{2}ax$ divido $-\frac{1}{8}aax$, quotus erit $-\frac{1}{4}a$ *per Prop. præc.* quem pono in Q; & statim deleto $-\frac{1}{8}aax$ per zerum illi suppositum, multiplico per ipsum quotum residuum divisoris B, eritque primo $-\frac{1}{4}a \times -\frac{3}{4}bx = \frac{3}{16}abx$, secundo $-\frac{1}{4}a \times ab = -\frac{1}{4}aab$; quæ facta, mutatis signis, subtrahuntur ex dividendo, supponendo illi zerum, & nihil remanet; proinde habetur quotus $Q\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}a = \frac{8x-3a}{12}$ *per Prop.* III. & IV. hujus.

II. Sit dividendum polynomium C per polynomium D, dico quotum esse $Q = \frac{1}{3}x - \frac{b}{c}$

$$C \quad \frac{x^3}{6b} + \frac{axx}{12b} - \frac{xx}{2c} - \frac{ax}{4c} - \frac{1}{3}cx + b$$
$$\quad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \quad 0$$

$$D \quad \frac{xx}{2b} + \frac{ax}{4b} - c$$

$$Q \quad \frac{1}{3}x - \frac{b}{c}$$

Nam dividendo $\frac{x^3}{6b}$ (hoc est $\frac{xxx}{6b}$) per $\frac{xx}{2b}$, quotus erit *per Prop. præc.* $\frac{1}{3}x$, quem pono in Q, & statim deleto $\frac{x^3}{6b}$ (apponendo illi zerum) multiplico residuum divi-

soris

foris D, nempe $+\frac{ax}{4b}-c$, eritque $\frac{1}{3}x\times\frac{ax}{4b}=\frac{axx}{12b}$ & $\frac{1}{3}x\times -c=\frac{1}{3}cx$, quæ facta fubtraho ex dividendo, fupponendo zerum.

Rurfus per eundem diviforem $\frac{xx}{2b}$ divido $-\frac{xx}{2c}$, & oritur quotus $-\frac{b}{c}$, quem pono in Q; & deleto $-\frac{xx}{2c}$ [fuppofito illi zero] multiplico per ipfum quotum refiduum diviforis $\frac{ax}{4b}-c$, & duo facta $\frac{ax}{4b}\times -\frac{b}{c}=-\frac{ax}{4c}$ & $-c\times -\frac{b}{c}=+b$ fubtraho ex dividendo, cumque nihil remaneat, patet quotum effe $\frac{1}{3}x-\frac{b}{c}=\frac{cx-3b}{3c}$ *per Prop.* III. & IV. *hujus*.

SCHOL. *Pro pleniori hujus fecundi exempli & fequentis Propof. intelligentia fciant tyrones* x^2, *vel* x^3, x^4 *&c. idem effe ac* xx, *vel* xxx, xxxx *&c. hoc eft quantitatem* x *elevatam ad quadratum, ad cubum, quadrato quadratum &c. prout infra explicabitur Cap.* III. *At compendii caufa pro* xx, xxx, *fcribitur* x^2, x^3 *&c.*

PROPOSITIO VIII.

Valorem fractionis, cujus denominator eft terminus compofitus, per infinitos terminos defignare.

DIvifa fit quantitas $aa-bb+c$ per $a+b$, quotus erit

erit $a - b$; & remanet c, hoc eſt fractio $\frac{c}{a+b}$ *per Propoſ.* III. *Cap.* I. cujus fractionis valor per infinitos terminos deſignari poteſt hoc pacto.

Dividatur c per a, erit quotus $\frac{c}{a}$ *per Prop.* VI. *hujus*, quem duc in diviſorem $a + b$, & factum $\frac{ac+bc}{a}$ ſeu $c + \frac{bc}{a}$ *per Schol. Propoſ.* IV. *hujus* ſubtrahe [mutatis ſignis] ex dividendo c, reſiduum erit $- \frac{bc}{a}$ *per Prop.* IV. *hujus*.

Deinde hoc reſiduum $- \frac{bc}{a}$ divide per eundem diviſorem a, quotus erit $- \frac{bc}{aa}$ *per Prop.* VI. *hujus*, quem duc in diviſorem $a + b$, & factum $- \frac{abc - bbc}{aa}$, ſeu $- \frac{bc}{a} - \frac{bbc}{aa}$ ſubtrahe (mutatis ſignis) ex dividendi reſiduo $- \frac{bc}{a}$, remanet $+ \frac{bbc}{aa}$.

Rurſus hoc reſiduum dividatur per a, & quotus $\frac{bbc}{a^3}$ ducatur in $a + b$, erit factum $\frac{abbc + b^3c}{a^3}$, ſeu $\frac{bbc}{aa} + \frac{b^3c}{a^3}$ ſubtrahendum (mutatis ſignis) ex reſiduo $+ \frac{bbc}{aa}$, & relinquitur $- \frac{b^3c}{a^3}$, & ſic deinceps.

Unde

Unde apparet ratio divisionem continuandi per infinitos terminos, qui sunt proportionales, & seriem Geometricam constituunt, nempe

$$\frac{c}{a}-\frac{bc}{a^2}+\frac{b^2c}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4}\ \&c.=\frac{c}{a+b}.$$

COROLL. I. *Si fiat* $a=2$, $b=1$, *&* $c=1$, *ita ut* $\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$, *& hi valores substituantur in terminis seriei jam inventis, aut fractio* $\frac{1}{2+1}$ *eodem pacto dividatur, quo divisa fuit fractio* $\frac{c}{a+b}$, *oritur series Geometrica* $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ *&c. Similiter si fiat* $a=3$, $b=1$, *&* $c=1$, *nempe* $\frac{c}{a+b}=\frac{1}{3+1}$, *oritur series* $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\frac{1}{81}+\frac{1}{243}$ *&c. Quæ quidem series terminorum Geometrice decrescentium, ut patet, exprimere valent quotum quam proxime verum datæ fractionis, modo talis fractionis numerator sit unitas.*

COROLL. II. *Series fractionum hujusmodi continuo decrescentium, quæ ad verum valorem semper magis accedunt, dicuntur* convergentes. *Quod si termini continuo crescant, tunc a vero valore continuo recedunt, ac* divergentes *appellantur. Ut si ponatur* $a=1$, $b=2$, *&* $c=1$, *hoc est* $\frac{c}{a+b}=\frac{1}{1+2}$, *fit series divergens* $1-2+4-8+16$ *&c. quæ a valore fractionis* $\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$ *tanto magis recedit, quanto magis continuatur, ut rem consideranti patet.*

SCHOL. I. *Hanc doctrinam, quam tanquam inutilem Cruzas in ſua Algebra* Cap. XIV. num. 40. *taxavit, plurimi fecerunt Cl. Viri* Leibnitius ([a]), Jac. Bernullus ([b]), Guido Grandus ([c]), Wolfius ([d]), & alii.

SCHOL. II. *Cum fractiones Decimales in omni fere Matheſi magni ſint uſus, eaſque nobis in approximatione radicum* Cap. XI. *adhibere mens ſit, brevem de illis notitiam in ſequenti Appendice ſubjicimus.*

APPENDIX

De fractionibus Decimalibus.

DEFINITIO I.

FRactiones Decimales ſunt illæ, quarum denominatores in ratione decupla ab unitate incipiente progrediuntur, nempe 1. 10. 100. 1000. 10000. &c.

Supponatur menſura aliqua, ut pes, virga, libra, vel recta linea diviſa in 10 æquales partes, ſingulæ deinde hæ partes in alias 10 partes, atque hæ ſingulæ rurſus in alias decem, & ſic deinceps, quantum quiſque velit: oriuntur ex hac diviſione partes decimæ, centeſimæ, milleſimæ, centeſimæ milleſimæ &c. quæ vocantur etiam *primæ, ſecundæ, tertiæ, quartæ &c.* iiſque diſtinguendis apponuntur virgulæ, integris autem cifra o. Sic fractio decimalis, 5. 8 6 4 2 (notis o · I II III IV ſuperpoſitis) ſignificat quinque integra, octo primas, ſex ſecundas, quatuor tertias, duas quartas. Sed ſatis

(a) Acta Erudit. Lipſ. an. 1682. & 1683. (b) De Ser. infinit. p. m. 267. (c) Theor. Hugen. pag. 126. (d) Elem. Analy. Cap. I. Prob. 7.

ſatis eſt virgulam ultimam apponere, & integra puncto diſtinguere, ut $5.864\overset{IV}{2}$. Quæ quidem fractio idem valet ac $5 + \frac{8}{10} + \frac{6}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000}$ ſeu $\frac{58642}{10000}$. At commodi gratia decimales ſcribuntur inſtar integrorum, omiſſo denominatore, modo ſupra explicato, nempe $5.864\overset{IV}{2}$.

COROLL. I. *Hinc ſequitur virgulas illas, ſive apices decimales, qui numeris apponuntur, eſſe loco denominatorum; ut in decimali* $5.\overset{I}{8}\overset{II}{6}\overset{III}{4}$, *apex unus importat denominatorem* 10, *duo apices denominatorem* 100, *tres denominatorem* 1000 *&c. hoc eſt* $\frac{8}{10}\ \frac{6}{100}\ \frac{4}{1000}$.

COROLL. II. *Hinc facile decimales ad eandem denominationem reducuntur, addendo tot zeros virgulis decimalibus affectos, quot opus fuerit; ut ſi decimalis* $3.\overset{I}{5}$ *reducenda ſit ad ſecundas, ad tertias vel quartas &c. ſcribitur* $3.5\overset{II}{0}$, $3.50\overset{III}{0}$, $3.500\overset{IV}{0}$. *Valor enim non mutatur, nam* $\overset{I}{5} = 5\overset{II}{0}$, $\overset{II}{5} = 5\overset{III}{0}$ *&c. ut julii 5 ſunt aſſes* 50.

COROLL. III. *Si integro cifræ quotcunque cum virgulis addantur, ejus valor idem manet; ut ſi ad* 3 *addas* $00\overset{III}{0}$, *ut fiat* $3.00\overset{III}{0}$, *non mutatur integri valor. Significat enim, ut prius, tres unitates, non autem unitates* 3000; *nam* $\frac{3000}{1000} = 3$.

SCHOL. *Ubi nullum præcedit integrum, ut in decimalibus* $\frac{8}{10}$, $\frac{24}{100}$, $\frac{725}{1000}$ *tunc loco integri ponitur zero, nempe* 0.8, 0.24, 0.725, *quæ æquivalent præcedentibus* $\frac{8}{10}$, $\frac{24}{100}$ *&c.*

DEFINITIO II.

Fractionum decimalium notæ dicuntur esse ejusdem ordinis, seu gradus, quarum iidem sunt denominatores, vel iidem apices. Sic in decimalibus 0.5679, & 0.045. notæ 6 & 4, item 7 & 5 dicuntur ejusdem gradus, quia utrique respondet idem denominator, scilicet $\frac{6}{100}$ & $\frac{4}{100}$, item $\frac{7}{1000}$ & $\frac{5}{1000}$. Nam utrique respondet idem apex, qui stat loco denominatoris *per Corol.* 1.

DEFINITIO III.

Progressio decimalis interrupta dicitur, cum habentur v. g. partes millesimæ, sed partes decimæ, aut centesimæ nullæ sunt ; ut $4.\overset{I}{2}\overset{IV}{5}$, ubi partes centesimæ, & millesimæ desunt, quæ quidem cifris interpositis supplentur : sic eadem decimalis, interpositis duabus cifris, erit $4.200\overset{IV}{5}$. Similiter $3.\overset{II}{5}\overset{V}{7}$, fiet $3.0500\overset{V}{7}$. Eadem ratione $\frac{5}{1000}$ scribitur $0.00\overset{III}{5}$, & $3 + \frac{45}{10000}$ scribitur $3.004\overset{IV}{5}$. Semper enim valor est idem, ut in *Coroll.* 2. & 3. fuit explicatum.

PROPOSITIO I.

Decimales addere, & subtrahere.

Fractiones decimales addendæ, vel subtrahendæ sic disponantur, ut notæ decimales ejusdem gradus sibi mutuo

tuo respondeant *per Defin.* 2.; & si progressio sit interrupta, ut in secundo exemplo sequenti, suppleantur loca vacua *per Defin.* 3. deinde additio & subtractio fiant, ut in communi Arithmetica additio & subtractio integrorum.

ADDITIONIS EXEMPLA.

$A\ \ 3.24\overset{\text{III}}{5}$	$5.\overset{\text{I}}{2}\overset{\text{III}}{7} = 5.20\overset{\text{III}}{7}$
$B\ \ 7.3\overset{\text{II}}{9}$	$6.\overset{\text{I}}{4}\overset{\text{II}}{5} = 6.4\overset{\text{II}}{5}$
$C\ \ 10.63\overset{\text{III}}{5}$	Summa $11.65\overset{\text{III}}{7}$

COROLL. *Patet ratio ex dictis: nam si decimales* A & B *fiant ejusdem denominationis* per Coroll. 2. *erunt* per Coroll. 1. $A = \frac{3245}{1000}$ & $B = \frac{7390}{1000}$ *proinde* $A + B = \frac{3245}{1000} + \frac{7390}{1000} = \frac{10635}{1000} = C\ 10.63\overset{\text{III}}{5}$ *per Defin.* 1.

SUBTRACTIONIS EXEMPLA.

$A\ \ 4.57\overset{\text{III}}{2}$	$7.\overset{\text{I}}{4}\overset{\text{III}}{2} = 7.40\overset{\text{III}}{2}$
$B\ \ 1.2\overset{\text{II}}{9}$	$\overset{\text{II}}{3}\overset{\text{III}}{5} = 0.03\overset{\text{III}}{5}$
$C\ \ 3.28\overset{\text{III}}{2}$	differentia $7.36\overset{\text{III}}{7}$

COROLL. *Ratio est eadem ac additionis. Nam si decimales* A & B *ad eandem denominationem reducantur per* Coroll. 2. *erunt per* Coroll. 1. $A = \frac{4572}{1000}$ & $B = \frac{1290}{1000}$

hinc

hinc $A - B = \frac{4572}{1000} - \frac{1290}{1000} = \frac{3282}{1000} = C\ 3.282^{\text{III}}$ *per Defin.* 1.

SCHOL. *Ut ex integris decimales subtrahi possint, addantur integro tot zeri, quot sunt apices decimalis subtrahendæ. Sic ad subtrahendum ex* 8 *integris tres centesimas, hoc est* 0.03^{II}, *adduntur ad* 8 *duo zeri, ut fiat* 8.00^{II} *eritque residuum* 7.97^{II}, *ut patet.*

PROPOSITIO II.

Decimales multiplicare.

FRactiones decimales multiplicantur ut integra in communi Arithmetica, nulla habita ratione virgularum decimalium. Sed ad distinguendas in producto partes decimales ab integris, adduntur simul apices utriusque factoris; summa enim dat numerum notarum decimalium, quæ numerari debent in producto, incipiendo a dextera sinistram versus.

EXEMPLA.

I.	II.	III.
4.05^{II}	0.745^{III}	0.000356^{VI}
3.2^{I}	42^{II}	0.0048^{IV}
810	1490	2848
1215	2980	1424
12.960^{III}	0.31290^{V}	0.0000017088^{X}

Co-

COROLL. I. *Operandi modus ex dictis facile demonstratur. Nam in primo exemplo* $4.0\overset{II}{5} = \frac{405}{100}$ *&* $3.\overset{I}{2} = \frac{32}{10}$ Defin. 1. *Ex communi autem Arithmetica* $\frac{32}{10} \times \frac{405}{100} = \frac{12960}{1000}$ $= 12.96\overset{III}{0}$ *per* Defin. 1. & Coroll. 1., *quod est ejusdem exempli primi productum.*

COROLL. II. *Patet etiam ex primo exemplo tres tantum notas decimales in facto abscindi, quia ex factoribus habentur apices tres. In reliquis exemplis quia factores plures apices continent, quam productum notas, ideo ad complendum numerum apicum æqualem, tot adduntur ad sinistram zeri, quot desunt in facto notæ decimales; unus præterea zerus additur cum puncto ad locum integrorum indicandum.*

COROLL. III. *Quod si in alterutro factore progressio decimalis sit interrupta, ut si multiplicari oporteat* $\overset{I}{4}\,\overset{III}{5}$ *per* $3.\overset{II}{2}$, *primo progressio interpositis zeris fiat integra per* Defin. 3., *hoc est fiat* $\overset{I}{4}\overset{III}{5} = 40\overset{III}{5}$, *&* $3.\overset{II}{2} = 3.0\overset{II}{2}$, *deinde multiplicando* $40\overset{III}{5} \times 3.0\overset{II}{2}$ *habetur productum* $1.2231\overset{V}{0}$.

SCHOL. *Si factorum unus sit numerus integer sine ullo sibi decimali annexo, in producto numerantur tot notæ, quot apices continet alterius factoris ultima nota dextrorsus.*

PRO-

PROPOSITIO III.

Decimales dividere.

Fiat divisio, ut in integris fieri solet; utque notæ decimales in quoto distinguantur, subtrahe numerum apicum, quos habet divisor, a numero apicum, quos habet dividendum; residuum dabit numerum notarum decimalium, quæ numerari debent in quoto a dextera sinistram versus. Si quoti figuræ pauciores sint, addantur cifræ, ut in III. exemplo.

E x e m p l a.

I. 3^{II}) 0.1356$3^{\text{V}}$ | 4.52$1^{\text{III}}$. II. 5.2$4^{\text{II}}$) 18.86$4^{\text{III}}$ | 3.6^{I}

3144
—00

III. 27.58$9^{\text{III}}$)0.35$4^{\text{III}}$ . . . . . | 0.0128$3^{\text{V}}$

27589
—78110
55178
229320
220712
—86080
82767
3313 &c.

Co-

COROLL. *Operandi ratio clara est. Nam in primo exemplo* per Defin. 1. *habetur* $\overset{II}{3} = \frac{3}{100}$ *&* $0.1356\overset{V}{3} = \frac{13563}{100000}$, *proinde dividendo numeratorem per numeratorem & denominatorem per denominatorem ac si essent numeri integri, habetur nova fractio* $\frac{4521}{1000} = 4.52\overset{III}{1}$ per Defin. 1. *nempe quotus in primo exemplo inventus. In tertio exemplo cum quinquies addita sit cifra* o, *dividendi apex fit* VIII, *a quo divisoris apice* III *subtracto, residuum* V *dat quoti apicem.*

SCHOL. *Quod si divisoris, aut dividendi decimalis progressio interrupta sit, fiat integra per* Defin. 3. *deinde instituatur divisio, ut supra dictum est.*

PROPOSITIO IV.

Fractionem quancunque in partes decimales reducere.

SIt data fractio $\frac{3}{5}$ reducenda in partes v. g. millesimas; Fiat 5. 3 : : 1000. x, erit per regulam proportionum $x = \frac{3000}{5} = 600$, unde apparet $\frac{3}{5} = \frac{600}{1000} = 0.60\overset{III}{0}$ *per Defin.* 1.

Similiter fractio $\frac{3}{7}$ reducenda sit in partes centesimas millesimas, hoc est in 100000. Operandum ut supra, & invenietur $\frac{3}{7} > 0.42857$, sed < 0.42858, defectu existente minori quam $\frac{1}{100000}$. Est enim fractio decimalis approximans, quæ non exprimit rationem nisi prope veram, ut Cl. Wolfius advertit.

SCHOL. *Hæc propositio maximum habet usum, tum in divisionibus, in quibus habetur residuum alicujus momenti, tum etiam in extractione radicum. Nam in utroque casu ex hac propositione haberi potest fractio decimalis magis magisque approximans, quæ exprimat rationem prope veram quoti, sive radicis quæsitæ. Ratio autem operationis per se manifesta est.*

PROPOSITIO V.

Decimales particulas ad fractionem datæ denominationis reducere.

QUæritur quot uncias unius pedis Romani conficiant particulæ decimales $\overset{III}{750}$. Quia pes Romanus dividitur in uncias 12, hinc patet particulas decimales convertendas esse in partes duodecimas. Sunt autem *per Defin.* 1. particulæ $\overset{III}{750} = \frac{750}{1000}$. Fiat jam $1000 . 750 :: 12 . x$, erit per regulam proportionum $x = \frac{9000}{1000} = 9$. Habentur ergo $\frac{9}{12}$, proinde $\overset{III}{750} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Igitur particulæ datæ conficiunt novem uncias, seu $\frac{3}{4}$ unius pedis Romani.

Similiter scire volo, quot asses, seu quot partes scuti Romani, quod in asses 100 dividitur, contineant decimales particulæ $\overset{IV}{5610}$. Cum *per Defin.* 1. sint $\overset{IV}{5610} = \frac{5610}{10000}$, si fiat $10000 . 5610 :: 100 . x$, erit per regulam proportionum $x = \frac{561000}{10000} = 56 + \frac{1}{10}$. Continent ergo asses $56 + \frac{1}{10}$, hoc est asses 56, & unius quadrantis Romani semissem. Ratio per se patet. SCHOL.

SCHOL. Simon Stevinus (a), *decimalium auctor ingeniosissimus, eas loco fractionum vulgarium adhibendas proposuit, summo quidem calculi commodo, cum decimales tractentur sine molestia, non secus ac integri essent numeri, ut vidimus. At recentiores Mathematici* Tacquetus (b), Præstetus (c), Reyneau (d), Wolfius (e), & alii *hoc præclarum inventum illustrarunt, additis quoque demonstrationibus, quæ in auctore desiderabantur.*

CAPUT III.

De Calculo Exponentiali.

DEFINITIONES.

I. SI quantitas ex. gr. a seipsam multiplicet, ex dictis *Propos.* 3. *Cap.* 1. fit aa, quod etiam exprimitur per a^2, & dicitur *quadratum*, seu *secunda potestas*. Cujus radix, seu latus est ipsa a, quæ prima etiam potestas dicitur. Si aa multiplicetur per idem latus a, oritur aaa, seu a^3, nempe *cubus*, aut *tertia potestas*. Si aaa rursus per a multiplicetur, oritur $aaaa$, seu a^4, nempe *quadrato quadratum*, aut *quarta potestas*, & sic in infinitum. Atque hinc habetur series continue proportionalium a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, &c.

II. Numerus potestati adscriptus dicitur *Index*, seu *Exponens* illius potestatis. Exponit enim quo dimensionis

 gradu

(a) Oeuvres Mathemat. in f. pag. m. 206. (b) Arith. pract. l. 1. Cap. 9.
(c) Elemens des Mathemat. Tom. 1. l. 9. (d) Science du Calcul.
(e) Elem. Matheseos edit. 2. Tom. 1. Cap. 9.

gradu gaudeat talis poteſtas, & indicat locum, quem occupare debet in ſerie proportionalium. Ut index 4 indicat quatuor dimenſiones ipſius a, & quartum illi locum competere in ordine proportionalium illius ſeriei.

III. Literæ m, n, r, s indicant exponentem potentiæ indeterminatæ, ut a^m, a^n, a^r, quæ poſſunt determinari ad quanlibet potentiam, tertiam, quartam, quintam &c.

IV. Series poteſtatum conſtituit progreſſionem geometricam, quæ procedit in ratione unitatis ad radicem. Exponentes vero progreſſionem Arithmeticam naturalem numerorum 1, 2, 3, 4, 5, &c.

V. Poteſtas, cujus exponens eſt numerus fractus, ut $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$ &c. deſignat radicem ejus poteſtatis, quæ indicatur a denominatore fractionis; nempe $a^{\frac{1}{2}}$ radicem ſecundam, $a^{\frac{1}{3}}$ radicem tertiam, ſeu cubicam &c. unde oritur alia ſeries $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, $a^{\frac{1}{5}}$, $a^{\frac{1}{6}}$, &c. poteſtatum, quæ dicuntur *imperfectæ*; & idem revera ſignificant ac $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[6]{a}$ &c. quæ ſigna dicuntur *Radicalia*.

VI. Poteſtas, cujus exponens eſt cum ſigno negativo, ut a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4} &c. ſignificat unitatem diviſam per talem poteſtatem. Sic a^{-1} idem eſt ac $\frac{1}{a}$, a^{-2} idem ac $\frac{1}{aa}$, a^{-3} ſignificat $\frac{1}{aaa}$ &c. Nam ſi fuerit ex. gr. $\frac{aa}{aaaa}$, eliſo aa tam in numeratore, quam in denominatore, habetur 1,

[nam

[nam $\frac{aa}{aa} = 1$] & remanet $\frac{1}{aa}$, quod æquivalet ipsi a^{-2}. Atque hinc oritur series potestatum, quæ dicuntur negativæ, ut a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5} &c. huic æqualis $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$, $\frac{1}{a^5}$ &c

VII. Zero, seu nihilum dicitur exponens unitatis, ita ut a^0 significet idem ac unitatem. Hinc posita progressione geometrica ab 1 incipiente, nempe 1, 2, 4, 8, 16 &c. erit $a^0 = 1$, $a^1 = 2$, $a^2 = 4$, $a^3 = 8$, $a^4 = 16$ &c.

COROLL. *Calculus potestatum, de quo agimus in hoc capite, fit per* Exponentes *ipsarum*; *proinde* Calculus Exponentialis *nuncupatur: qui ob potestates imperfectas* Defin. 5. *explicatus, extractionem quoque radicum complectitur.*

SCHOL. I. *Nota magnum esse discrimen inter* 2a *&* aa, *seu* a^2. *Nam* 2a *significat duplum ejusdem* a, *seu* a + a; *at vero* a^2 *significat secundam potestatem ipsius* a. *Hinc posita* $a = 3$, *erit* $2a = 6$, *at vero* $a^2 = 9$.

SCHOL. II. *Etsi nullum existat in natura solidum, quod pluribus quam tribus dimensionibus constet, in Algebra tamen alia atque alia concipiuntur solida, quorum dimensionum numerus in infinitum extenditur, ut superiora exempla docent. Usus autem est frequentissimus in seriebus Geometricis & generatim in doctrina Curvarum.*

PRO-

PROPOSITIO I.

Potentiam quancunque per aliam ejuſdem radicis multiplicare, aut dividere.

I. Adde ſimul exponentes, habebis factum.

a^2	$a^{\frac{1}{2}}$	a^{-2}	x^m	y^m
a^3	$a^{\frac{1}{3}}$	a	x^m	y^n
a^5	$a^{\frac{5}{6}}$	a^{-1}	x^{2m}	y^{m+n}

II Pro diviſione ſubtrahe exponentem potentiæ dividentis ab exponente potentiæ dividendæ, habebis quotum.

a^5	$a^{\frac{1}{2}}$	a^2	y^{m+n}	x^{2n}
a^2	$a^{\frac{1}{3}}$	a^{-3}	y^n	x^r
a^3	$a^{\frac{1}{6}}$	a^5	y^m	x^{2n-r}

Demonſtratio. $a^2 = aa$, & $a^3 = aaa$ *ex Defin.* 1. ſed factum ex aa in aaa, ſi per extenſum ſcriberetur, eſſet $aaaaa$, ergo $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$. Similiter $a^{-2} = \frac{1}{aa}$ *per Defin.* 6, & $a^1 = \frac{1}{a}$ *per Ax.* 1. *Cap.* 2. Sed $\frac{1}{aa} \times \frac{a}{1} = \frac{a}{aa}$, *Propoſ.* 5. *Cap.* 2. & $\frac{a}{aa} = \frac{1}{a} = a^{-1}$. Ergo multiplicando a^{-2} per a, factum erit a^{-1}. Quod &c.

Simi-

Simili ratione a^5 divisum per $a^2 = \frac{a^5}{a^2}$ hoc est, si per extensum fractio scribatur, $= \frac{aaaaa}{aa}$; & ablatis hinc inde aa, residuum est $aaa = a^3$; ergo ut dividatur a^5 per a^2, quotus erit $a^{5-2} = a^3$. Pariter dividere a^2 per a^{-3} idem est ac dividere $\frac{aa}{1}$ per $\frac{1}{a^3}$; sed $\frac{aa}{1}$ divisum per $\frac{1}{a^3} = \frac{aa \times a^3}{1}$ *per Prop. 6. Cap.* 2. ergo dividendo a^2 per a^{-3} provenit quotus a^5. Quod &c.

PROPOSITIO II.

Potestatem quancunque ad aliam dati exponentis elevare.

Exponens potestatis ducatur in exponentem datum, factum erit exponens potestatis quæsitæ. Sit elevanda a^2 ad potentiam tertiam; ductis inter se exponentibus 2 & 3, habebis potestatem quæsitam a^6. Similiter sit elevanda potestas y^2 ad potestatem 6; multiplicatis exponentibus 2 & 6, habebis y^{12} potestatem sextam quæsitam. Si elevanda sit x^n ad m, habebis x^{mn}. Quod si x^n elevanda sit ad secundam, tertiam, quartam &c. potestatem scribitur x^{2n}, x^{3n}, x^{4n} &c.

Demonstratio patet *ex Defin.* 1. Nam perspicuum est $a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2 \times 3} = a^6$, sic etiam $x^{n \times 2} = x^{2n}$, & $x^{n \times 3} = x^{3n}$ &c.

Co-

COROLL. *Eodem modo elevantur ad poteſtatem dati exponentis quantitates, quæ conſtant facto duarum, vel plurium quantitatum. Sic ſi* ab *elevetur ad poteſtatem ſecundam, erit* $a^2 b^2$, *vel* $\overline{ab}^2$. *Poteſtas tertia quantitatis* $a^2 b^1 c^3$ *erit* $a^6 b^3 c^9$. *Nam* $a^{2\times 3} b^{1\times 3} c^{3\times 3} = a^6 b^3 c^9$. *Poteſtas* m *quantitatis* abcd *erit* $\overline{abcd}^m$.

SCHOL. *Poteſtates diſſimiles adduntur, ſubtrahuntur, multiplicantur &c. ut ceteræ quantitates. Sint enim duæ poteſtates* a^m *&* b^n, *earum ſumma erit* $a^m + b^n$, *differentia* $a^m - b^n$, *factum* $a^m b^n$, *quotus* $\frac{a^m}{b^n}$.

PROPOSITIO III.

Binomium ad quancunque potentiam elevare.

I. Sit binomium $a + b$ elevandum ad potentiam v. gr. ſextam. Scribatur in primo termino prima radicis pars evecta ad poteſtatem quæſitam, ut hic, ad 6, quæ erit a^6. In ſecundo termino ſcribatur eadem a evecta ad potentiam unitate minorem, & ducta in alteram radicis partem b, quæ erit $a^5 b$. In tertio ſcribatur eadem radix a evecta ad poteſtatem rurſus unitate minorem ducta in quadratum alterius partis radicis, nempe in b^2, quæ erit $a^4 b^2$; & ſic deinceps, minuendo unitate in quolibet termino poteſtatem primæ partis radicis, & contra augendo unitate poteſtatem ſecundæ partis radicis, donec veniatur ad terminum, in quo prima pars radicis unica tantum dimenſione conſtet, qui erit terminus penultimus, & in ultimo

timo reperiatur ſecunda radicis pars evecta ad eandem poteſtatem quæſitam. Erit igitur poteſtas 6^a dati binomii $a+b$.

$$a^6 . a^5b^1 . a^4b^2 . a^3b^3 . a^2b^4 . a^1b^5 . b^6 .$$

II. Pro faciliori autem methodo fieri ſolent ex duabus dati binomii literis duæ progreſſiones Geometricæ, quarum altera a potentia quæſita incipiens, deſcendat uſque ad unitatem, altera viciſſim ab unitate aſcendat uſque ad eandem potentiam, & multiplicatis ordine terminis unius progreſſionis per terminos alterius, habetur dati binomii potentia quæſita. Quæritur potentia ſexta ipſius $a+b$.

Series I.	$a.^6$	$a.^5$	$a.^4$	$a.^3$	$a.^2$	$a.^1$	1.
Series II.	1.	$b.^1$	$b.^2$	$b.^3$	$b.^4$	$b.^5$	$b.^6$
Poteſtas VI.	$a^6+a^5b^1+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6.$						

III. Coefficientes potentiarum, quos Ougtrhedus *uncias* vocat, ſic reperiuntur. Exponens primi termini dat unciam ſecundi termini, ut in ſuperiori exemplo 6 erit uncia ſecundi termini a^5b. Pro uncia tertii termini, duc unciam modo inventam ſecundi termini, nempe 6, in exponentem 5, quem habet prima pars radicis in eodem ſecundo termino, & productum 30 divide per 2, quotus 15 eſt uncia tertii termini. Deinde duc hanc ipſam unciam 15 in exponentem 4, quem habet in tertio termino radicis prima pars, nempe a^4, & productum 60 divide per 3, quotus dat unciam quarti termini, & ſic deinceps. Itaque potentia ſexta binomii $a+b$ cum unciis ſuis erit $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$.

IV. Alii vero pro ejuſmodi unciis inveniendis duas Geometricas progreſſiones numerorum componunt, ita ut ex terminis ſibi ordine reſpondentibus fiat fractio, & multiplicando numeratores inter ſe & denominatores pariter inter ſe, habentur numeri unciales quæſiti. Ecce exemplum pro eadem potentia ſexta.

Series I.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
Series II.	1.	2.	3.	4.	5.	6.

Hinc $\frac{6}{1} = 6$ eſt uncia ſecundi termini.
$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} = \frac{30}{2} = 15$. uncia tertii termini.
$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{120}{6} = 20$. uncia quarti.
$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{30}{2} = 15$. uncia quinti.
$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{1} = 6$. uncia ſexti.
$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = 1$. uncia ultimi.

Hac methodo repertæ ſunt unciæ potentiarum 1ª 2ª 3ª 4ª &c. binomii $a + b$, ut ex ſequenti exemplo apparet.

1ª $a + b$
2ª $a^2 + 2ab + b^2$
3ª $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
4ª $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
5ª $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
6ª $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

SCHOL. I. *Si binomium ſit poſitivum, omnia ſigna ſunt affirmativa, ut patet ex ſuperiori exemplo. Si vero ſecunda binomii pars ſit negativa, ut* a — b; *termini, in quibus radix* — b *evecta erit ad poteſtatem imparem,* 1,

3,

3, 5 *&c. afficiendi sunt signo* —, *reliqui omnes signo* +. *Sic potestas tertia binomii* a — b *in superiori exemplo fieret* $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ *ob exponentes impares* b^1, b^3.

SCHOL. II. *Si numerus aliquis sive integer, sive fractus præcedat alterutrum, vel utrunque binomii terminum, ex.gr. si elevari debeat ad tertiam potentiam* a + 2b, *elevetur primo binomium ipsum* a + b *ad tertiam potentiam, quod secundum methodum superius allatam erit* $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. *Deinde numerus* 2, *qui afficit* b, *elevetur ad eandem potentiam, ad quam in singulis terminis elevata existit quantitas* b, *erit pro secundo termino* = 2, *pro tertio* = 4, *pro ultimo* = 8. *Duc postea hos numeros, seu potestates in coefficientes terminorum, in quibus* b *æquali potestate gaudet, habebis* $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$, *pro tertia potestate quæsita binomii* a + 2b. *Similiter si elevanda sit ad quartam potestatem* 2ax + b, *erit* $16a^4x^4 + 32a^3bx^3 + 24a^2b^2x^2 + 8ab^3x + b^4$.

SCHOL. III. *Aliquando juvat binomium ad datam potestatem elevare scribendo ad ejus dexteram exponentem potestatis quæsitæ, ducta desuper linea. Sic ut elevetur* a+b *ad quadratum, scribitur* $\overline{a+b}^2$; *ut ad cubum*, $\overline{a+b}^3$, *& in genere ad quancunque potestatem indeterminatam* m, *scribitur* $\overline{a+b}^m$.

COROLL. I. *Hinc sequitur, ut potestas hoc modo efformata ad aliam potestatem dati exponentis elevetur, satis esse exponentem unius ducere in exponentem alterius. Elevanda sit* $\overline{a+b}^2$ *ad tertiam potestatem scribitur* $\overline{a+b}^{2\times 3}$

 = a

$=\overline{a+b}^{6}$. *Similiter elevanda sit* $\overline{a+b}^{m}$ *ad potestatem* n, *scribitur* $\overline{a+b}^{mn}$.

COROLL. II. *Item sequitur, ut duæ potestates ejusdem quantitatis inter se multiplicentur, sufficere earum exponentes simul addere. Sic* $\overline{a+b}^{2} \times \overline{a+b}^{3}$ *erit* $\overline{a+b}^{2+3}$ $=\overline{a+b}^{5}$. *Similiter* $\overline{a-b}^{m} \times \overline{a-b}^{n} = \overline{a-b}^{m+n}$. *Contra vero ut dividantur, satis est exponentem dividentis ab exponente dividendi subtrahere. Sic* $\overline{a-x}^{5-2} = \overline{a-x}^{3}$, *significat potentiam* $\overline{a-x}^{5}$ *divisam per potentiam* $\overline{a-x}^{2}$. *Item* $\overline{a+b}^{m-n}$ *est quotus resultans ex divisione* $\overline{a+b}^{m}$ *per* $\overline{a+b}^{n}$.

PROPOSITIO IV.

Canonem generalem pro quolibet binomio, aut polynomio ad potestatem quancunque elevando assignare.

SIt binomium $p+q$ elevandum ad quanlibet potestatem indeterminatam m. Fiant duæ progressiones Geometricæ sequentes:

I.	p^{m}.	p^{m-1}.	p^{m-2}.	p^{m-3}.	p^{m-4}.	&c.
II.	1.	q^{1}.	q^{2}.	q^{3}.	q^{4}.	&c.

Quibus inter se ductis, habetur formula, seu Canon genera-

neralis $p^m + p^{m-1} q + p^{m-2} q^2 + p^{m-3} q^3 + p^{m-4} q^4$ &c. Ut inveniantur coefficientes, seu unciæ, fiant aliæ duæ series Geometricæ, nempe

I. m. $m-1$. $m-2$. $m-3$. $m-4$. &c.

II. 1. 2. 3. 4. 5. &c.

Fiat fractio, & multiplicatis terminis, ut in *Propos. præc.* erit $\frac{m}{1}$ uncia secundi termini: $\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}$ uncia tertii termini: $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ uncia quarti termini &c. quibus suo loco in superiori Canone generali dispositis, habetur formula generalis pro quocunque binomio, aut polynomio ad quanlibet potestatem elevando, nempe $p^m + m p^{m-1} q + m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3} q^3 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} p^{m-4} q^4$ &c.

Patet exponentem m continuo decrescere, proinde ubi fit $= 0$, ibi erit ultimus terminus potentiæ quæsitæ. Nam fiat ex. gr. $m = 3$, in quarto Canonis termino erit $p^{m-3} = p^{3-3} = p^0 = 1$.

Sit igitur elevandum ad tertiam potestatem binomium $2ax + bb$. Supponatur $2ax = p$, $+ bb = q$ & $m = 3$. Loco ipsorum p, q, m substituantur eorum valores, nempe $2ax$, $+ bb$ & 3; adhibitaque formula generali, erit $p^m = 8a^3x^3$, $m p^{m-1} q = 12a^2b^2x^2$, $m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2 = 6ab^4x$, demum $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3} q^3 = b^6$.

Est

Est igitur tertia potestas quæsita $8a^3x^3 + 12a^2b^2x^2 + 6ab^4x + b^6$.

Sit secundo trinomium $a + b - c$ elevandum ad quartam potestatem. Suppono $a = p$, $+ b - c = q$, $m = 4$ factaque, ut modo docuimus, debita valorum substitutione, erit quarta potestas quæsita $a^4 + 4a^3b - 4a^3c + 6a^2b^2 - 12a^2bc + 6a^2c^2 + 4ab^3 - 12ab^2c + 12abc^2 - 4ac^3 + b^4 - 4b^3c + 6b^2c^2 - 4bc^3 + c^4$.

PROPOSITIO V.

Potestates compositas multiplicare.

Multiplicatio potestatum compositarum nullam habet difficultatem, bene perceptis iis, quæ *Propos.* VII. *Cap.* I. & *Prop.* I. *hujus* dicta sunt, ideoque unum, vel alterum exemplum hoc loco afferre satis erit.

I. Multiplicanda sit quantitas A per B, productum erit C, nempe:

$$\begin{array}{llllll} A & a^2 & -2ab & +b^2 & & \\ B & a^2 & +2ab & -b^2 & & \\ \hline & a^4 & -2a^3b & +a^2b^2 & & \\ & & +2a^3b & -4a^2b^2 & +2ab^3 & \\ & & & -a^2b^2 & +2ab^3 & -b^4 \\ \hline C & a^4 & 0 & -4a^2b^2 & +4ab^3 & -b^4 \end{array}$$

II. Multiplicari oporteat quantitas M $x^2 + 2ax - a^2 + 3bx - b^2$ per N $x^3 - 2b$. Facilitatis gratia disponantur termini, ut sequitur, productum erit P.

M x^2

$$
\begin{array}{ll}
M & x^2 + 2ax - a^2 \\
 & \quad 3bx - b^2 \\
N & x^3 - 2a \\
\hline
 & x^5 + 2ax^4 - a^2x^3 \\
 & \quad + 3bx^4 - b^2x^3 \\
 & \qquad\qquad - 2ax^2 - 4a^2x + 2a^3 \\
 & \qquad\qquad\qquad - 6abx + 2ab^2 \\
\hline
P & x^5 + 2ax^4 - a^2x^3 - 2ax^2 - 4a^2x + 2a^3 + 2ab^2 \\
 & \quad + 3bx^4 - b^2x^3 \qquad - 6abx
\end{array}
$$

Ubi videre eſt terminos, in quibus x ad aliquam poteſtatem elevatur, ordinatim unum ſub alio collocari, ita ut dignitates æquales ſibi reſpondeant.

PROPOSITIO VI.

Poteſtates compoſitas dividere.

NEque multum negotii faceſſit poteſtatum compoſitarum diviſio, ſi quæ dicta ſunt *Prop.* VIII. *Cap.* I. *& Propoſ.* I. *hujus* ante oculos habeantur.

I. Sit dividenda quantitas A $6a^3 - 15a^2b + 9ab^2$ per B $2a^2 - 3ab$. Diviſo primo termino $6a^3$ per $2a^2$, quotus eſt $3a$ *per Propoſ.* I. *hujus*, quem pone in C, & per hunc multiplica totum diviſorem B: productum $6a^3 - 9a^2b$, ſubtrahitur [mutatis ſignis] ex dividendo A, & remanet $-6a^2b + 9ab^2$; quod divide pariter per $2a^2$, quotus eſt $-3b$ *per Prop. cit.*, quem pone in C, & per ipſum multiplica, ut antea, totum diviſorem B; producitur

$-6a^2$

$-6a^2b+9ab^2$ subtrahendum [mutatis signis] ex residuo prædicto, & nihil remanet. Habetur ergo quotus C $3a-3b$.

$$\begin{array}{lllll|l} B\ 2a^2-3ab) & A & 6a^3 & -15a^2b & +9ab^2 & C \\ & & -6a^3 & +9a^2b & & +3a \\ \hline & & 0 & -6a^2b & +9ab^2 & -3b \\ & & & +6a^2b & -9ab^2 & \\ \hline & & & 0 & 0 & \end{array}$$

II. Dividere oporteat M per N, quotus est P, ut sequenti exemplo patet.

$$\begin{array}{llllll|l} N\ yy-16) & M & y^6 & -8y^4 & -124y^2 & -64 & P \\ & & -y^6 & +16y^4 & & & +y^4 \\ \hline & & 0 & +8y^4 & -124y^2 & & +8y^2 \\ & & & -8y^4 & +128y^2 & & +4 \\ \hline & & & 0 & +4y^2 & -64 & \\ & & & & -4y^2 & +64 & \\ \hline & & & & 0 & 0 & \end{array}$$

PROPOSITIO VII.

Ex potestatibus radicem extrahere.

I. UT extrahatur radix ex potestate data, dividatur exponens potestatis per exponentem radicis quæsitæ, quotus erit quæsita radix. Quæritur radix secunda potestatis a^3, diviso exponente 3 per 2, habetur radix quæsi-

quæſita $a^{\frac{3}{2}}$. Similiter radix tertia ejuſdem poteſtatis erit $a^{\frac{3}{3}} = a^1$. Item radix quinta poteſtatis a^7 erit $a^{\frac{7}{5}}$, ſeu $a^{1+\frac{2}{5}}$ & generaliter $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; eademque ratione $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

II. Si radix ſit extrahenda ex facto plurium quantitatum, ut a^6b^2c, eodem modo operandum. Nam diviſis exponentibus ejuſdem a^6b^2c per exponentem radicis quæſitæ, habetur radix. Erit ergo ipſius a^6b^2c radix ſecunda $a^{\frac{6}{2}}b^{\frac{2}{2}}c^{\frac{1}{2}}$, hoc eſt $a^3bc^{\frac{1}{2}}$, ita ut $\sqrt{a^6b^2c} = a^3bc^{\frac{1}{2}}$. Sic $\sqrt{ab} = a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$, ſeu $\overline{ab}^{\frac{1}{2}}$.

Ratio deducitur ex ipſa poteſtatum compoſitione. Nam ſicuti una poteſtas ad aliam elevatur multiplicando earum exponentes *per Prop. 2. hujus*; ſic ut radix extrahatur, contrario modo agitur, dividendo ſcilicet exponentem potentiæ per exponentem radicis quæſitæ.

SCHOL. I. *Sed juvabit tyronem ſequentes expreſſiones, quæ apud auctores non raro occurrunt, hic adnotare.* $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$, *ſeu* $a^1b^{\frac{1}{2}}$; *nam* a *eſt radix ipſius* a^2 & $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$. *Pariter* $\sqrt{a^3b} = a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} = a^{1+\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = a^1a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{ab}$, *ubi patet quantitatem partim eſſe rationalem, partim irrationalem. Item* $\sqrt{a^3b^3} = a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}} = ab\sqrt{ab}$. *Hæc pauca ceteris dignoſcendis facem præferunt.*

H SCHOL.

SCHOL. II. *Hanc novam radices exprimendi rationem excogitavit* Newtonus (a) *magno calculi commodo. Nam sic quantitates irrationales ad formam rationalium reducuntur & eodem modo pertractantur, de quo in* Cap. sequenti.

PROPOSITIO VIII.

Radicem quadratam ex quantitatibus compositis extrahere.

METhodus extrahendi radices ex compositis quantitatibus non differt ab ea, qua in vulgari Arithmetica uti solemus. Sed claritatis gratia sit quantitas A, cujus radix quadrata quæritur.

C	a	$A\ a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+cc$	B
D	$2a+b$	$-a^2-2ab-b^2-2ac-2bc-cc$	$a+b+c$
E	$2a+2b+c$	$0 \quad 0 \quad 0$	

Primo radix quadrata quantitatis a^2 est a, hanc pone dextrorsum in B, & sinistrorsum in C, ejusque quadratum a^2 subtrahe ex a^2, remanet 0. Duplica deinde inventam radicem a quam pone in D, & per $2a$ divide $+2ab$ datæ quantitatis residuum, habebis quotum b, quem adde in B priori radicis termino, & sinistrorsum in D, habebis $2a+b$, quo ducto in radicem b, fit $2ab+bb$, mutatisque signis, subtrahe ex quantitate A, remanet 0.

Rursus duplicata radice $a+b$, habebis in E $2a+2b$ divisorem, per quem divide quantitatem $2ac$, quotus erit c, quo

(a) Epist. ad Oldenburg. apud Wallisium Tom. III. pag. 622.

c, quo posito tam in B, quam in E, multiplica per hanc radicem c modo inventam totam quantitatem E, & productum $2ac + 2bc + cc$ subtrahe, mutatis signis, ex quantitate residua ipsius A, nihil remanet. Proinde $\sqrt{aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc} = a + b + c$.

Sit rursus extrahenda radix quadrata ex quantitate M. Operare ut supra, invenies radicem $x + b - 1$, ut in N.

$$\begin{array}{r|l|l}
 & \quad M & N \\
x & x^2 + 2bx - 2x + b^2 - 2b + 1 & x+b-1 \\
2x+b & -x^2 - 2bx \qquad -b^2 & \\
2x+2b-1 & \;\; 0 \qquad\;\; 0 \qquad\quad 0 & \\
 & \text{Resid.} - 2x - 2b + 1 & \\
 & \qquad + 2x + 2b - 1 & \\
 & \qquad\;\; 0 \qquad\; 0 &
\end{array}$$

COROLL. *Patet ex compositione potestatum, tum etiam ex earum resolutione, in omni quadrato quantitatis compositæ contineri quadrata partium quantitatum peculiarium, ex quibus constat radix, ut in primo exemplo* a^2, b^2, c^2, *unde radix est* $a + b + c$; *& ulterius contineri duplum rectanguli earundem partium, hoc est* $2ab$, $2bc$, $2ac$.

SCHOL. I. *Omne quadratum duplicem habet radicem, unam positivam, negativam alteram. Nam* aa *tam oritur ex* $a \times a$, *quam* $-a \times -a$. *Proinde in primo exemplo radix* $a + b + c$ *fieri potest negativa* $-a - b - c$, *& in secundo* $x + b - 1$ *fieri potest* $-x - b + 1$, *& tamen idem quadratum habebitur. Quod pro solutione problematum secundi gradus scire juvabit. Ex quantitate autem*

negativa radix quadrata extrahi non potest: Nam — aa *neque oriri potest ex* a × a, *neque ex* — a × — a, *ut patet* ex Propos. VII. Cap. I. *idcirco dicitur quadratum imaginarium, & quod dari revera non potest.*

SCHOL. II. *Si ex data quantitate radix quadrata extrahi nequit, designatur ipsa radix præfigendo quantitati propositæ signum radicale* $\surd$. *Sic ad extrahendam radicem secundam ex* aa + bb, *scribitur* $\sqrt{aa+bb}$; *& hinc oriuntur quantitates radicales, de quibus in sequenti Cap.*

PROPOSITIO IX.

Ex quantitate composita radicem cubicam extrahere.

I. Sit quantitas A, cujus radix cubica inquiritur.

1. Radix cubica extracta ex a^3 est a, *per Prop.* VII., quæ ponatur seorsim, ut in B, & per ejus quadrati triplum $3aa$ positum in C dividatur secundus terminus, nempe $-3aab$, oritur quotus $-b$ pro altera radicis parte ponenda in B.

2. Ex $a-b$ fiat cubus, quem subtrahe ex quantitate data A; & cum nihil remaneat, erit radix quæsita $a-b$.

	A	$a^3 - 3aab + 3ab^2 - b^3$	B
C	$3aa)$	$-a^3 + 3aab - 3ab^2 + b^3$	$a-b$
		0 0 0 0	

II. Sit extrahenda radix cubica ex quantitate F.

1. Radix cubica primi termini $8a^3$, *per Prop.* VII., est $2a$, quam pone in G, & per ejus quadrati triplum $12a^2$ divi-

divide secundum terminum quantitatis F, nempe $36a^2$, quotus -3 dat alteram radicis partem ponendam in G.

2. Ex radice $2a-3$ fiat cubus $8a^3-36a^2+54a-27$, quem subtrahe ex quantitate data F; & cum nihil remaneat, signum est radicem cubicam esse $2a-3$.

$$12a^2) \left| \begin{array}{l} F\quad 8a^3-36a^2+54a-27 \\ \underline{-8a^3+36a^2-54a+27} \\ \quad\ 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} G \\ 2a-3 \end{array}$$

Si radix tribus, vel pluribus constet terminis, quod ex ipsa terminorum inspectione facile dignoscitur, tunc præstat cubicam radicem inquirere per formulas generales, de quibus in sequenti Propos.

COROLL. *Latere non potest methodi hujus ratio nisi eos, qui cuborum genesin prorsus ignorant. Patet enim cubum ex binomio ex. gr. efformatum constare cubis utriusque quantitatis, & ulterius triplo quadrati primæ in secundam & vicissim secundæ in primam quantitatem ducti, ut in primo exemplo constat cubis* a^3, b^3, *tum etiam* $3a^2b$, & $3b^2a$. *Signa autem, quibus cubi illi sunt affecti, produnt signa eorum radicis, ut in secundo exemplo cubus* -27 *indicat radicem negativam* -3.

SCHOL. I. *Quod si ex data quantitate radix extrahi non possit modo prædicto, ex. gr. ex* $aa-bb$; *indicatur signo radicali cubico, nempe* $\sqrt[3]{aa-bb}$, *quod de aliis quibuscunque radicibus dictum intelligatur.*

SCHOL. II. *Fractionum radices habentur, si separatim ex numeratore, & denominatore eodem modo extrahantur.*

tur. Juvabit tamen tyronem ad expressiones sequentes animum advertere. Radix quadrata quantitatis $\frac{xx+2ax+aa}{bb}$ *erit* $\frac{x+a}{b}$. *Similiter* $\frac{aa}{bc}$ *erit* $\frac{a}{\sqrt{bc}}$. *Radix cubica quantitatis* $\frac{a^3}{b^3c^3}$ *erit* $\frac{a}{bc}$. *Item* $\frac{a}{\sqrt[3]{dm}}$ *est pariter cubica quantitatis* $\frac{a^3}{dm}$.

SCHOL. III. *Si fractio, ex qua radix extrahenda est, integro adhæreat, tunc primo integrum ad fractionem ejusdem nominis reducatur* per Prop. 1. Cap. 2. *Deinde extrahatur, si fieri possit, radix quæsita ex numeratore & denominatore. Sit extrahenda radix quadrata ex quantitate* $6+\frac{1}{4}$, *facta reductione* per Prop. cit. *habetur* $\frac{25}{4}$, *cujus radix est* $\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$. *Similiter sit quantitas* $\frac{c^2-4c}{4}+1$, *facta reductione* per Prop. cit. *oritur* $\frac{c^2-4c+4}{4}$, *cujus radix* $=\frac{c-2}{2}$ per Prop. 8. hujus.

PROPOSITIO X.

Radices quascunque extrahendi methodum generalem assignare.

CONsideretur quantitas, ex qua radix eruenda est, uti quantitas elevanda ad eam potestatem, cujus radix

radix inquiritur. Exponens pro radice quadrata *ex Defin.* 5. erit $=\frac{1}{2}$, pro cubica $=\frac{1}{3}$, pro quadrato quadrata $=\frac{1}{4}$. Exemplis nonnullis res fiet clarissima.

I. Sit extrahenda radix quadrata ex quantitate $a^2+2ab-2ac+b^2-2bc+cc$. Ex formula generali *Prop.* 4. hujus $p^m+mp^{m-1}q+m\times\frac{m-1}{2}p^{m-2}q^2$ &c. sumantur duo priores termini [nam alii sunt inutiles, cum radices extrahendæ sunt rationales] & ponatur $a^2=p$, $+2ab-2ac$ &c. $=q$, & [quia agitur de radice quadrata] erit $m=\frac{1}{2}$, ideoque primus terminus radicis $=p^m=a^{2\times\frac{1}{2}}=a$. Secundus erit $mp^{m-1}q=\frac{1}{2}a^{2\times-\frac{1}{2}}q$, hoc est $\frac{1}{2}a^{-1}\times\overline{2ab-2ac}$, nempe $\frac{1}{2}a^{-1}\times 2ab=a^{-1+1}=a^0b=1b$. Similiter $\frac{1}{2}a^{-1}\times -2ac=-a^{-1+1}c=-a^0c=-1c$; ideoque radix quæsita est $a+b-c$. Neque enim ulterius est progrediendum ubi m fit $=0$, proinde cum hic habeatur a^0b, & $-a^0c$, habentur duo ultimi radicis termini.

Similiter extrahenda sit radix quadrata ex quantitate

$$9a^2-12ab+6a+4bb-4b+1.$$

Ex eadem formula generali $p^m+mp^{m-1}q=0$, pone $p=9a^2$, $q=-12ab+6a$ &c. $m=\frac{1}{2}$, erit $p^m=9^{\frac{1}{2}}\times a^{2\times\frac{1}{2}}=3a$, nam $9^{\frac{1}{2}}=3$, *per Defin.* 5., *& Propos.* 7. Est igitur $3a$ primus terminus. Deinde $mp^{m-1}=\frac{1}{2}\times 9^{\frac{1}{2}-1}$

$=\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} \times 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times a^{2m-1} = \frac{1}{6} a^{-1} \times q = \frac{1}{6} a^{-1} \times -$ $12ab = -\frac{12}{6} a^{-1+1} \times b = -2a^{0}b = -2b$, qui erit ſecundus radicis terminus. Pariter $\frac{1}{6} a^{-1} \times 6a = \frac{6}{6} a^{-1+1}$ $= 1a^{0}$. Unde habetur tertius terminus radicis $+ 1$. Eſt ergo radix quæſita $3a - 2b + 1$.

II. Quæritur radix cubica quantitatis $a^{3} - 3a^{2}b + 3ab^{2} - b^{3}$. Pone $a^{3} = p$, & $-3a^{2}b + 3ab^{2} - b^{3} = q$, erit [ob radicem cubicam] $m = \frac{1}{3}$. Poſitis igitur valoribus p & q in duobus formulæ generalis terminis, $p^{m} + mp^{m-1}q$, habebis $p^{m} = a^{3 \times \frac{1}{3}} = a$ primum radicis terminum. Deinde $mp^{m-1}q = \frac{1}{3} a^{3 \times -\frac{2}{3}}$, hoc eſt $\frac{1}{3} a^{-2} q = \frac{1}{3} a^{-2} \times -3a^{2}b$ $= -a^{-2+2}b = -a^{0}b = 1b$. Atque hic ſiſtendum, ut ſupra monuimus. Radix ergo cubica eſt $a - b$.

III. Quæritur radix quadratoquadrata quantitatis $a^{4} - 4a^{3}b + 6a^{2}b^{2} - 4ab^{3} + b^{4}$. Pone $a^{4} = p$, & $-4a^{3}b + 6a^{2}b^{2} - 4ab^{3} + b^{4} = q$, erit $m = \frac{1}{4}$ ob radicem quadrato quadratam. Poſitis jam valoribus in duobus formulæ generalis terminis, habebis primum terminum radicis $p^{m} = a^{4 \times \frac{1}{4}} = a^{1}$. Pro ſecundo erit $mp^{m-1}q = \frac{1}{4}$ $a^{4 \times -\frac{3}{4}}$, hoc eſt $\frac{1}{4} a^{-3} q = \frac{1}{4} a^{-3} \times -4a^{3}b$; unde oritur productum $-a^{0}b$, ex quo admonemur haberi jam ſecundum radicis terminum b, nec eſſe ulterius progrediendum. Eſt ergo radix quæſita $a - b$.

SCHOL.

SCHOL. *Cum valor exponentis* m *nullibi occurrit* $= 0$, *tunc radix datæ quantitatis erit irrationalis*, *&* *extractio radicis continuari poterit in infinitum*, *seu per infinitos terminos*, *id quod* approximatio radicum *dicitur*, *de quo in Prop. sequenti*.

PROPOSITIO XI.

Extractiones radicum per infinitos terminos continuare.

I. EXtrahenda sit ex quantitate $a^2 - b^2$ radix, ex. gr. quadrata, per terminos infinitos A, B, C, D &c. Adhibeantur formulæ generalis tot termini, per quot continuatam vis extractionem radicis, nempe $p^m + mp^{m-1}q + m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3} q^3$ &c. pone $p = a^2$, $q = -b^2$, & [ob radicem quadratam] $m = \frac{1}{2}$, erit

$A (= p^m = a^{2 \times \frac{1}{2}}) = a^1$.

$B (= mp^{m-1} q = \frac{1}{2} a^{2 \times -\frac{1}{2}}$, hoc est $\frac{1}{2} a^{-1} q) = -\frac{b^2}{2a}$.

$C (= m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2 = \frac{1}{2} \times -\frac{1}{4}$, hoc est $-\frac{1}{8} a^{2 \times -\frac{2}{3}}$, hoc est $-\frac{1}{8} a^{-3} q^2) = -\frac{b^4}{8a^3}$.

$D (= m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3} q^3 = \frac{1}{2} \times -\frac{1}{4} \times -\frac{1}{2}$, hoc

eſt $\frac{1}{16} a^2 \times - \frac{5}{2}$, hoc eſt $\frac{1}{16} a^{-5} q^3$) $= - \frac{b^6}{16a^5}$.

Et ſic deinceps in infinitum. Eſt ergo radix quæſita $A + B + C + D$ &c. $= a - \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} - \frac{b^6}{16a^5} - \frac{5b^8}{128a^7} - \frac{7b^{10}}{256a^9}$ &c.

II. At pro hac formula, qua utitur *Cl. Guiſneus* ([a]), atque alii, adhibere præſtat formulam Newtonianam magis quidem expeditam, & moleſtiæ fractionum minus obnoxiam videlicet, $P\frac{m}{n} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ$ &c. in qua P ſignificat primum terminum quantitatis illius, cujus radix inveſtigatur. Q reliquos terminos diviſos per primum; $\frac{m}{n}$ indicem dimenſionis, ſeu radicis quæſitæ. Termini jam inventi exprimuntur literis A, B, C, D &c. nempe A exprimit primum radicis terminum $= P\frac{m}{n}$; B, ſecundum $= \frac{m}{n} AQ$; C, tertium $= \frac{m-n}{2n} BQ$, & ſic deinceps. Sed ecce exemplum.

Extrahenda ſit radix ſecunda ex quantitate $\sqrt{c^2 + x^2}$ ſeu $\overline{c^2 + x^2}^{\frac{1}{2}}$ *per Prop. 7. hujus*; dico radicem eſſe $= c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} - \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7}$ &c. Nam erit in hoc caſu

([a]) Application de l'Algeb. a la Geometrie, edit. 2. Paris pag. xxx.

ſu $P = c^2$, $Q = \frac{x^2}{c^2}$, $m = 1$, $n = 2$, proinde habetur

$$A\left(= P\frac{m}{n} = c^{2 \times \frac{1}{2}}\right) = c.$$

$$B\left(= \frac{m}{n} AQ = \tfrac{1}{2} c \times \frac{x^2}{c^2}\right) = \frac{x^2}{2c}.$$

$$C\left(= \frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{1}{4} \times \frac{x^2}{2c} \times \frac{x^2}{c^2}\right) = -\frac{x^4}{8c^3}.$$

$$D\left(= \frac{m-2n}{3n} CQ = -\tfrac{1}{2} \times -\frac{x^4}{8c^3} \times \frac{x^2}{c^2}\right) \frac{x^6}{16c^5}.$$

$$E\left(= \frac{m-3n}{4n} DQ = -\tfrac{5}{8} \times \frac{x^6}{16c^5} \times \frac{x^2}{c^2}\right) = -\frac{5x^8}{128c^7}.$$

Radix ergo quæſita $= A + B + C + D$ &c. $= c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7}$ &c.

Similiter extrahenda ſit radix tertia ex quantitate $\sqrt{a^3 - b^3}$, ſeu $\overline{a^3 - b^3}^{\frac{1}{3}}$ per *Prop. cit.* Procedendo eadem methodo, erit $P = a^3$, $Q = -\frac{b^3}{a^3}$, $m = 1$, $n = 3$, proinde

$$A\left(= P\frac{m}{n} = a^{3 \times \frac{1}{3}} =\right) a^1.$$

$$B\left(= \frac{m}{n} AQ\right) = -\frac{b^3}{3a^2}.$$

$$C\left(= \frac{m-n}{2n} BQ\right) = -\frac{b^6}{9a^5}.$$

 D (=

$$D \left(= \frac{m-2n}{n3} C Q\right) = -\frac{5b^9}{81a^8}.$$

$$E \left(= \frac{m-3n}{4n} D Q\right) = -\frac{10b^{12}}{243a^{11}}.$$

Est ergo radix quæsita $= A + B + C + D + E$ &c. $= a - \frac{b^3}{3a^2} - \frac{b^6}{9a^5} - \frac{5b^9}{81a^8} - \frac{10b^{12}}{243a^{11}}$ &c.

SCHOL. I. *Hac formula uti quoque possumus in divisione fractionis per terminos infinitos. Sit dividenda* $\frac{1}{a+b}$ [*hoc est* $\overline{a+b}^{-1}$ per Def. 6.] *Pone* $P = a$, $Q = \frac{b}{a}$, $m = -1$, $n = 1$, *erit* $A \left(= P^{\frac{m}{n}}\right) = a^{-\frac{1}{1}} = a^{-1} = \frac{1}{a}$.

$$B \left(= \frac{m}{n} A Q\right) = -1 \times \frac{1}{a} \times \frac{b}{a} = -\frac{b}{a^2}.$$

$$C \left(= \frac{m-n}{2n} B Q\right) = -1 \times -\frac{b}{a^2} \times \frac{b}{a} = \frac{b^2}{a^3} \text{ \&c.}$$

$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3}$ *&c. ut in* Prop. 8. Cap. 2.

SCHOL. II. *Patet jam ex duplici fonte oriri series infinitas terminorum proportionalium, scilicet ex divisione, & extractione radicum. Primo modo quæsitæ fuerunt a* Nicolao Mercatore Holsato ([a]); *secundo a* Newtono ([b]). *Earum usus est ad obtinendum radicum approximationem, ut*

([a]) Logarithmo-tecnia Londini 1668. Acta Erudit. Lips. ann. 1693.

([b]) Epist. ad D. Oldenburgium ann. 1676. in Tom. 3. Operum Wallisii Analy. per quantit. series &c. in Tom. Philosophiæ Natur. Amstælod. ann. 1723.

at vidimus ; ad inveniendas areas & longitudines Curvarum, ad Solidorum ſuperficies dimetiendas, aliaque magni momenti circa curvas Mechanicas expedienda. Nos aliquem ipſarum uſum in reſolutione æquationem experiemur.

CAPUT IV.

De Calculo Radicali.

DEFINITIONES.

I. Quantitas ſive numerica, ſive literalis, ex qua radix extrahi non poteſt, dicitur potentia imperfecta, quantitas ſurda, & irrationalis ; & a ſigno $\surd$, quod *radicale* dicitur, *radicalis* denominatur, ut $\sqrt[2]{5}$, $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a-b}$, $\sqrt[4]{ax+bb}$; ſive, ut aliis placet ſcribere, $\sqrt[3]{}(a-b)$, $\sqrt[4]{}(ax+bb)$.

II. Signa radicalia præfixos habent exponentes ejus potentiæ, cujus radicem deſignant. Ubi nullus eſt exponens, pro radice ſecundæ potentiæ accipitur, ut $\sqrt{a}$ indicat radicem ſecundam quantitatis a. At $\sqrt[3]{a-b}$ ſignificat radicem tertiam, ſeu cubicam quantitatis $a-b$.

III. Si radicale ſignum præcedat numerus, aut quantitas literalis, ut $2\sqrt{3}$, $a\sqrt{b}$ &c. quantitas, quæ præcedit, dicitur eſſe *extra ſignum*, nempe 2 & a. A quibuſdam vero quantitates illæ vocantur *Coefficientes*. Cum quantitas nulla præcedit, ibi ſemper intelligitur unitas, ut $1\sqrt{2}$, $1\sqrt{a}$ &c.

IV. Ut

IV. Ut quantitas extra ſignum ſub ſigno radicali poni valeat, elevari prius debet ad illam ipſam poteſtatem, quam indicat exponens ſigni radicalis, & multiplicari per quantitatem ſub ſigno radicali exiſtentem. Sic $2\sqrt{3}$ fiet $\sqrt{12}$. Item $a\sqrt{b-c}$, erit $\sqrt{a^2b-a^2c}$. Demum $a\sqrt[m]{bc}$, erit $\sqrt[m]{a^mbc}$.

V. Contra vero quantitas ſub ſigno radicali exiſtens, & eundem exponentem habens, quem habet ſignum radicale, eſt quantitas rationalis, & ponitur extra ſignum, extracta radice. Ut $\sqrt{ab^2} = b\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{am^3} = m\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[n]{a^nb} = a\sqrt[n]{b}$. Relinquitur ſub ſigno id, quod radicale eſt.

VI. Quantitas negativa ſub ſigno radicali, cujus exponens eſt numerus par, dicitur radix *imaginaria*, ſeu impoſſibilis, ut $\sqrt[2]{-a}$, $\sqrt[4]{-a}$, $\sqrt[6]{-a}$; ſimiliter $\sqrt[2]{-3}$, $\sqrt[4]{-5}$ &c. nam impoſſibile eſt quadratum negativum ex dictis in *Schol.* 1. *Prop.* 8. *Cap.* 7.

VII. Duæ quantitates radicales dicuntur *commenſurabiles* inter ſe, ſeu *communicantes*, cum ad ſimplicem expreſſionem redactæ, habent ſub ſigno radicali quantitatem eandem, ut $3\sqrt{5}$ & $2\sqrt{5}$; pariter $b\sqrt{a-b}$ & $c\sqrt{a-b}$. Nam exprimi poteſt ratio, quam inter ſe habent; eſt enim $3\sqrt{5} \,.\, 2\sqrt{5} :: 3 \,.\, 2$. Item $b\sqrt{a-b} \,.\, c\sqrt{a-b} :: b \,.\, c$, ut patet.

VIII. Si

VIII. Si radicale signum quodcunque comprehendat sub se aliam quantitatem radicalem, ut $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, vel $\sqrt[3]{a^2-b\sqrt{c}}$, radix *universalis* dicitur; & denominatur a signo, quod totam illam quantitatem, linea superducta, seu vinculo, complectitur. Sic $\sqrt[3]{2+3\sqrt{5}}$ dicitur radix universalis cubica: hoc est ex quantitate $2+3\sqrt{5}$ radicem cubicam esse extrahendam eo pacto, quo inferius docebitur.

PROPOSITIO I.

Quantitates radicales diversæ denominationis ad eandem reducere.

I. Reducendæ sint radicales $\sqrt[2]{a}$ & $\sqrt[3]{b}$ ad eandem denominationem. Erit ex *Defin.* 5. *Cap.* 3. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ & $\sqrt[3]{b} = b^{\frac{1}{3}}$, redactisque fractionibus ex communi Arithmetica ad eandem denominationem, fiunt $a^{\frac{3}{6}}$ & $b^{\frac{2}{6}}$; proinde a elevari debet ad tertiam potestatem, & b ad secundam, ut indicant novi numeratores fractionum. Signis autem radicalibus præfigendus exponens 6, communis scilicet ipsarum fractionum denominator. Erunt ergo $\sqrt[6]{a^3}$ & $\sqrt[6]{b^2}$.

Similiter reducendæ sint $\sqrt[2]{2}$ & $\sqrt[6]{20}$ ad eandem denominationem. Quia $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ & $\sqrt[6]{20} = 20^{\frac{1}{6}}$ *per Defin.*

fin. cit. redactis fractionibus $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{6}$ ad idem nomen, habentur $\frac{6}{12}$ & $\frac{2}{12}$, quibus ad minores terminos reductis, dividendo per 2, habentur $\frac{3}{6}$ & $\frac{1}{6}$; unde patet 2 ad tertiam potestatem esse elevandum & 20 ad primam; erunt ergo $\sqrt[9]{8}$ & $\sqrt[6]{20}$.

II. Vel sic: reducendæ sint ad idem signum $\sqrt[2]{c}$ & $\sqrt[6]{a}$, quia exponens 6 præcise divisibilis est per exponentem 2, multiplico per quotum 3 tam exponentem 2, quam quantitatem sub signo existentem c, eam elevando ad potentiam tertiam, eritque $\sqrt[6]{c^3}$ ejusdem nominis cum $\sqrt[6]{a}$. Eadem ratione $\sqrt[2]{3}$ & $\sqrt[4]{5}$ reductæ ad idem signum, fiunt $\sqrt[4]{9}$ & $\sqrt[4]{5}$. Praxis oritur ex *Coroll. Prop.* 3. *Cap.* 2.

Ratio autem est, quia una radix non fit major, etiamsi ejus potentia major fiat, hoc est ad altiorem gradum elevetur. Est enim a radix tam potentiæ a^2, quam potentiæ a^3, a^4, a^5 &c. proinde si $\sqrt{a^2}$ per multiplicationem fiat $\sqrt[3]{a^3}$ remanet idem valor, & $\sqrt[2]{a^2} = \sqrt[3]{a^3}$.

SCHOL. I. *In reducendis ad eandem denominationem, seu idem signum radicalibus, quantitates, quæ sunt extra signum, non immutantur, sed manent eædem. Reducendæ sint ad idem signum* $3\sqrt[2]{2}$ *&* $4\sqrt[3]{5}$, *fient* $3\sqrt[6]{8}$ *&* $4\sqrt[6]{25}$. *Similiter* $a\sqrt[2]{b}$ *&* $c\sqrt[3]{n}$ *fient* $a\sqrt[6]{b^3}$ *&* $c\sqrt[6]{n^2}$. *Nam* $a\sqrt[2]{b} = \sqrt[2]{a^2 b}$ per Defin. 4. *hujus*, *sed* $\sqrt[2]{a^2 b} = \sqrt[6]{a^6 b^3}$ per

per hanc Propof., & $\sqrt[6]{a^6b^3} = a\sqrt[6]{b^3}$ per Prop. 7. Cap. 3. *Ergo* $a\sqrt[2]{b} = a\sqrt[6]{b^3}$. *Eadem ratione* $c\sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{c^3n} = \sqrt[6]{c^6n^2} = c\sqrt[6]{n^2}$, *adeoque radicalium coefficientes non mutantur. Demonstrationem licet per se claram tyrones ex dicendis magis intelligent.*

SCHOL. II. *Ut radicales addi, subtrahi, multiplicari, aut dividi invicem possint, eas ad idem signum prius reducere necesse est, quod notetur.*

PROPOSITIO II.

Radicales ad simpliciorem expressionem reducere.

I. Dividatur quantitas sub signo existens per potestatem ejusdem gradus, seu ejusdem exponentis, quem præfert signum radicale, & relicto quoto sub signo, radix potestatis, per quam facta fuit divisio, ponatur extra signum: hoc est extrahatur a quantitate radicali id, quod est rationale, & ponatur extra signum. Sit $\sqrt{aac+aab}$ divide per a^2, & quoto $c+b$ sub signo relicto, pone extra signum radicem potestatis dividentis, nempe a, erit radicalis ad simpliciorem expressionem redacta $a\sqrt{c+b} = \sqrt{aac+aab}$.

Sit pariter $\sqrt[3]{54}$ reducenda ad simpliciorem expressionem. Divide 54 per cubum 27, & relicto quoto 2 sub signo, pone extra signum radicem ejusdem cubi, nempe 3, erit

erit $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{54}$. Eadem ratione $\sqrt[3]{8a^3b}$ erit $2a\sqrt[3]{b}$; & $\sqrt[n]{ab^n}$ erit $b\sqrt[n]{a}$.

II. Quod si quantitas radicalis sit valde composita, ita ut ex sola terminorum inspectione non innotescat, an per maximam ejusdem gradus potestatem sit divisibilis, quærantur *per Prop.* 9. *Cap.* 1. omnes illius divisores: ex illis necessario apparebit, an sit potestas requisita. Quæritur ex. gr. an $\sqrt[3]{120}$ sit reducibilis ad simpliciorem expressionem. Inter ejus divisores apparet 8, qui est tertia potestas requisita. Divide ergo 120 per 8, & relicto quoto 15 sub signo, habebis $2\sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{120}$. Item si $\sqrt[4]{48}$ reducenda sit ad simpliciorem, erit $2\sqrt[4]{3}$, nam inter divisores numeri 48, est 16, qui est potestas quarta quæsita, ac ter dividit ipsum 48.

COROLL. I. *Pro faciliori praxi, divide quantitatem radicalem sub signo existentem per* 2, *per* 3, *per* 4 *&c. successive, & examina, an quoti illi sint potestas quæsita: quod facile agnosces si ex illis radicem extrahas. Sit* $\sqrt{392}$. *divide* 392 *per* 2, *quotus* 196 *est quadratum ex radice* 14, *per quod si dividas* 392, *habebis* 2, *proinde* $\sqrt{392} = 14\sqrt{2}$. *Similiter sit reducenda* $\sqrt[3]{192}$, *divide per* 3, *quotus* 64 *dat cubum ex latere* 4, *per quem cubum dividendo* 192, *habebis* 3; *ideoque* $\sqrt[3]{192} = 4\sqrt[3]{3}$, *& sic de aliis.*

COROLL. II. *Ex hac propositione dignoscitur, an duæ radicales ejusdem gradus sint inter se commensurabiles, &* commu-

communicantes. *Nam si scire velim, an* $\sqrt{8}$ *&* $\sqrt{18}$ *sint communicantes, reduco illas ad simpliciorem expressionem* $2\sqrt{2}$ *&* $3\sqrt{2}$, *quae* ex Defin. 6. hujus *erunt inter se, ut* 2 *ad* 3. *Ita* $\sqrt{50}$ *&* $\sqrt{18}$ *redactae, sunt* $5\sqrt{2}$ *&* $3\sqrt{2}$; *erit ergo* $\sqrt{50} \cdot \sqrt{18} :: 5 \cdot 3$.

SCHOL. *Ut id facile obtineatur, ex quantitatibus sub signo radicali existentibus fiat fractio, quae ad minimos terminos reducatur. Sic in superiori exemplo* $\sqrt{8}$ *&* $\sqrt{18}$ *facile dignoscuntur esse commensurabiles. Nam fractio* $\frac{8}{18}$ *ad minimos terminos redacta fit* $\frac{4}{9}$. *Sunt ergo* $\sqrt{8} \cdot \sqrt{18} :: \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} :: 2 \cdot 3$. *Similiter ex* $\sqrt{50}$ *&* $\sqrt{18}$ *fiat fractio* $\frac{50}{18}$, *quae reducitur ad minimos terminos* $\frac{25}{9}$; *unde* $\sqrt{50} \cdot \sqrt{18} :: \sqrt{25} \cdot \sqrt{9} :: 5 \cdot 3$. *Demum* $\sqrt[3]{a^3b}$ *&* $\sqrt[3]{bc^3}$ *eadem ratione inveniuntur esse ut* a *ad* c.

PROPOSITIO III.

Quantitates radicales addere, aut unam ex altera subtrahere.

I. RAdicales addendae, aut subtrahendae reducantur, si fieri potest, ad simpliciorem expressionem *per Prop. antec.* Si communicantes sint, quantitates rationales extra signum addantur, vel subtrahantur, ut fieri solet in quantitatibus rationalibus; & earum summa, aut differentia praeponitur signo radicali. Sint addendae quantitates $\sqrt{50}$ & $\sqrt{18}$, quae redactae *per Prop. cit.* sunt $5\sqrt{2}$ & $3\sqrt{2}$, additis quantitatibus extra signum 5 & 3, earum summa erit $8\sqrt{2}$. Subtrahenda sit $\sqrt{18}$ ex $\sqrt{50}$; hoc est $3\sqrt{2}$ ex $5\sqrt{2}$ *per Prop. antec.* subtrahe 3 ex 5, residuum erit $2\sqrt{2}$.

II. Quod si quantitates addendæ, aut subtrahendæ non sint communicantes, sed incommensurabiles, summa fit per signum +; subtractio per signum —. Sic duarum $\sqrt{2}$ & $\sqrt{5}$ summa erit $\sqrt{2}+\sqrt{5}$; differentia vero $\sqrt{2}-\sqrt{5}$. Similiter duarum $\sqrt{a+b}$ & $\sqrt{a-b}$ summa erit $\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$; differentia autem $\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}$.

III. Quod si radicales addendæ, vel subtrahendæ sint compositæ, eadem ratione operandum, ut exempla sequentia indicant.

Additionis Compositæ Exempla.

$$\begin{array}{r} 3\sqrt{2}-5\sqrt{3}+6\sqrt{5}+2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-8\sqrt{5}+\sqrt{6} \\ \hline 5\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{5}+3\sqrt{6} \end{array}$$

Subtractionis Compositæ Exempla.

$$\begin{array}{r} 4\sqrt{3}-4\sqrt{2}+5\sqrt{6}-3\sqrt{7} \\ 2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-7\sqrt{6}+5\sqrt{7} \\ \hline 2\sqrt{3}-6\sqrt{2}+12\sqrt{6}-8\sqrt{7} \end{array}$$

PROPOSITIO IV.

Quantitates radicales multiplicare.

I. Multiplicentur inter se quantitates extra signum, tum seorsim quantitates sub signo existentes, habe-

habebis productum quæsitum, ut $5\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} = 20\sqrt{6}$.
Similiter $m\sqrt[3]{a} \times n\sqrt[3]{a} = mn\sqrt[3]{aa}$.

II. Quod si radicales habeant signum radicale quadraticum $\sqrt{}$, & sint communicantes, operatio fit brevior. Nam satis est productum, quod fit ex quantitatibus extra signum existentibus, ducere in quantitatem sub signo radicali positam. Sint multiplicandæ $3\sqrt{2}$ & $5\sqrt{2}$. Duc primo inter se 3 & 5, earumque factum 15 duc in 2, erit productum 30. Oritur enim quantitas rationalis; nam $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$, adeoque $15 \times 2 = 30$.

Sint pariter multiplicandæ $\sqrt{x^4 + x^2a^2}$ & $\sqrt{x^2a^2 + a^4}$, quæ ad simpliciores terminos redactæ *per Prop.* 2. *hujus*, sunt $x\sqrt{x^2 + a^2}$, & $a\sqrt{x^2 + a^2}$, proinde communicantes *per Defin.* 6. Duc itaque productum $ax \times \overline{x^2 + a^2}$, in quantitatem scilicet sub signo existentem perinde ac forent quantitates rationales, habebis productum rationale $ax^3 + a^3x$.

III. Si radicalis per rationalem, aut rationalis per radicalem sit multiplicanda (idem enim est) ex. gr. $\sqrt{a+b} \times \overline{c+d}$. Reducatur primo rationalis $c + d$ ad idem signum radicale, eam scilicet elevando ad potestatem ejusdem gradus, ita ut fiat $\sqrt{c^2 + 2cd + d^2}$. Multiplicetur deinde $c^2 + 2cd + d^2$ per $a + b$, perinde ac essent quantitates rationales, erit productum quæsitum $\sqrt{ac^2 + 2acd + ad^2 + bc^2 + 2bcd + bd^2}$, quod etiam exprimi poterat hoc modo $\overline{c+d}\sqrt{a+b}$.

Multi-

Multiplicando pariter $3\sqrt[n]{5}$ per 2, aut per $\frac{1}{2}$, productum erit $6\sqrt[n]{5}$, aut $\frac{3}{2}\sqrt[n]{5}$.

IV. Si quantitates multiplicandæ compositæ sint ex radicalibus, vel ex radicalibus simul & rationalibus, ducantur singuli termini unius per singulos alterius secundum regulas radicalium simplicium superius explicatas, servata consueta signorum + & — ratione. Exempla rem satis declarant.

I.
$$\begin{array}{r} \sqrt{5}+\sqrt{3} \\ \sqrt{5}-\sqrt{3} \\ \hline 5+\sqrt{15} \\ -\sqrt{15}-3 \\ \hline 5-3=2 \end{array}$$

II.
$$\begin{array}{r} 3+2\sqrt{5} \\ 5-3\sqrt{5} \\ \hline 15+10\sqrt{5} \\ -9\sqrt{5}-30 \\ \hline +\sqrt{5}-15 \end{array}$$

III.
$$\begin{array}{l} 2a+\sqrt{a+x} \\ b-\sqrt{a+x} \\ \hline 2ab+b\sqrt{a+x} \\ \quad -2a\sqrt{a+x}-\overline{a+x} \\ \hline 2ab+b\sqrt{a+x}-2a\sqrt{a+x}-\overline{a+x} \end{array}$$

Ratio multiplicandi quantitates radicales ita generatim demonstratur. Sit multiplicanda $\sqrt{3}$ per $\sqrt{2}$, dico productum esse $\sqrt{6}$. Nam ex definitione multiplicationis ita debet esse unitas ad multiplicantem ($\sqrt{2}$), ut multiplicandus

dus ($\sqrt{3}$) ad productum, quod voco P; erit ergo $1 . \sqrt{2} :: \sqrt{3} . P$. & in eadem ratione erunt eorum quadrata, nempe $1 . 2 :: 3 . P^2$, sed $1 . 2 :: 3 . 6$, ergo $P^2 = 6$, & $P = \sqrt{6}$. Quod erat &c.

COROLL. I. *Quod si binomium radicale quadraticum multiplicetur per se ipsum, mutato tamen in alterutro factore signo + in —, vel contra — in +, oritur monomium rationale, ut in primo exemplo* $\sqrt{5} + \sqrt{3} \times \sqrt{5} - \sqrt{3}$ *producit quantitatem rationalem 2, & hoc dicitur binomium multiplicari* per sui contrarium, *de quo inferius*.

COROLL. II. *Si trinomium radicale quadraticum, ex. gr.* $\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{5}$ *multiplicetur per se ipsum, mutato aliquo ex signis ut per* $\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{5}$, *oritur binomium partim radicale, partim rationale, ut* $3 + \sqrt{48}$, *quod* per Coroll. 1. *ad monomium omnino rationale facile reducitur*.

SCHOL. *Si radicales signum diversum habeant, prius reducentur ad idem signum ex dictis* Schol. 3. Prop. 1. *hujus, deinde fiet multiplicatio ut supra. Sint multiplicandæ* $\sqrt[2]{5} \times \sqrt[3]{7}$, *erunt reductæ* per Propos. 1. *hujus* $\sqrt[6]{125}$ *&* $\sqrt[6]{49}$, *earumque productum* $\sqrt[6]{6125}$.

PROPOSITIO V.

Quantitates radicales dividere.

I. SI divisor & dividendus sint communicantes, satis est dividere quantitates extra signum, quotus est quantitas rationalis. Sic ad dividendum $6\sqrt{3}$ per $3\sqrt{3}$, divi-

diviso 6 per 3, quotus est 2. Similiter $4\sqrt{2}$ diviso per $2\sqrt{2}$, habetur quotus 2. Eadem ratione $a\sqrt{a+b}$ diviso per $b\sqrt{a+b}$, habetur pro quoto $\frac{a}{b}$

Quod sic demonstratur. Ponantur sub signo quantitates 6 & 3: erit $6\sqrt{3}=\sqrt{108}$ & $3\sqrt{3}=\sqrt{27}$. Dividatur jam $\sqrt{108}$ per $\sqrt{27}$, hoc est 108 per 27, quotus est $\sqrt{4}=2$. Quod &c. Similiter positis sub signo a & b, erit $a\sqrt{a+b}=\sqrt{a^3+a^2b}$, & $b\sqrt{a+b}=\sqrt{ab^2+b^3}$, & dividendo $\sqrt{a^3+a^2b}$ per $\sqrt{ab^2+b^3}$ (hoc est a^3+a^2b per ab^2+b^3, ut fit in rationalibus,) erit quotus $\frac{\sqrt{aa}}{\sqrt{bb}}=\frac{a}{b}$. Quod &c.

II. Si divisor & dividendus non fuerint communicantes, dividantur seorsim quantitates extra signum & seorsim, quæ sub signo existunt. Sic ad dividendum $6\sqrt{ab}$ per $2\sqrt{a}$ habetur quotus $3\sqrt{b}$. Item dividendo $\sqrt{6}$ per $2\sqrt{3}$, quotus erit $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Demum $\sqrt{15}$ per $\sqrt{3}$ dat quotum $\sqrt{5}$.

III. Quod si dividenda sit quantitas radicalis per rationalem; vel e contrario: semper quantitas rationalis ad radicalem reducatur, eam scilicet elevando ad potestatem ejusdem gradus, & ponendo illam sub signo radicali. Ut si dividenda sit a per $\sqrt[3]{ab}$, elevetur a ad tertiam potestatem ita ut fiat $\sqrt[3]{a^3}$, quæ divisa per $\sqrt[3]{ab}$ dabit quotum

tum $\frac{\sqrt[3]{aa}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{aa}{b}}$, ut in ſequenti *Schol.* 1. *hujus*.

Ratio dividendi radices ita generatim demonſtratur. Dividenda ſit radicalis $\sqrt{15}$ per $\sqrt{3}$, dico quotum eſſe $\sqrt{5}$. Nam ex communi diviſionis definitione, diviſor ad dividendum eſt, ut unitas ad quotum, quem voco $\mathcal{Q}$: hoc eſt, $\sqrt{3} . \sqrt{15} :: 1 . \mathcal{Q}$; & in eadem ratione ſunt eorum quadrata, $3 . 15 :: 1 . \mathcal{Q}^2$. Sed $3 . 15 :: 1 . 5$, ut patet; proinde $\mathcal{Q}^2 = 5$, & $\mathcal{Q} = \sqrt{5}$. Quod erat &c.

SCHOL. I. *Si radicalium diviſio exprimatur per modum fractionis (quod non raro fit) tunc ſignum radicale vel ſeorſim numeratori, & ſeorſim denominatori præponitur, ut ſuperiora exempla docent; vel toti fractioni, ſcilicet* $\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}$ *&c.*

SCHOL. II. *Si ex denominatore tantum, vel ex ſolo numeratore extrahi poſſit radix, utique extrahitur, ſed alteri ſignum radicale præfigitur. Sit* $\frac{\sqrt{axx}}{\sqrt{ab}}$, *facta diviſione erit* $\frac{\sqrt{xx}}{\sqrt{b}}$, *extractaque ex numeratore radice, fit* $\frac{x}{\sqrt{b}}$. *Similiter ex* $\sqrt{\frac{cb}{a^2b}}$ *facta diviſione, oritur* $\sqrt{\frac{c}{a^2}}$, *& extracta ex denominatore radice, habetur* $\frac{\sqrt{c}}{a}$.

PROPOSITIO VI.

Radicales compositas dividere.

I. Dividenda sit radicalis composita $\sqrt{15} + \sqrt{21} - \sqrt{27}$ per $\sqrt{3}$. Dividantur singula trinomii membra per $\sqrt{3}$, ut radicales simplices *per Prop. praec.* erit quotus $\sqrt{5} + \sqrt{7} - 3$. Eadem ratione dividendo per $\sqrt{5}$ radicalem $\sqrt{20} - \sqrt{10} + \sqrt{15}$, erit quotiens $2 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Rursus dividendum sit trinomium $10\sqrt{2} + 2\sqrt{15} - 3\sqrt{35}$ per 4, erit quotus $\frac{5}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{15} - \frac{3}{4}\sqrt{35}$.

II. Quod si dividere oporteat binomium A ex rationali quantitate & radicali compositum per aliud binomium simile B, divisa quantitate rationali 8 per rationalem 2, habetur quotus C, per quem multiplicando totum divisorem B, productum $8 + 4\sqrt{1}$ subducitur (mutatis signis) ex dividendo A, & nihil remanet. Idem fit in secundo exemplo. In tertio autem, per eundem divisorem N dividitur fractionis M tam numerator, quam denominator, ut habeatur fractio in minimis terminis, ut in Q, quo exemplo infra utemur.

	B	A	C
EXEMPL. I.	$2 + \sqrt{1}$)	$8 + 4\sqrt{1}$	($+4$
		$8 + 4\sqrt{1}$	
		$0 \quad 0$	
EXEMPL. II.	$-1 + \sqrt{-\frac{3}{4}}$)	$2 - 2\sqrt{-\frac{3}{4}}$	(-2
		$2 - 2\sqrt{-\frac{3}{4}}$	
		$0 \quad 0$	

EXEM-

EXEMPLUM III.

$$N\ aa+cc)\ \overset{M}{\frac{a^3\sqrt{aa+cc}+acc\sqrt{aa+cc}}{2aa+cc}}\ \Big|\ \overset{Q}{\frac{a\sqrt{aa+cc}}{2}}$$

seu $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$

III. At si divisor sit binomium radicale ex. gr. $\sqrt{5}-\sqrt{2}$, per quod dividenda sit quantitas $\sqrt{18}$; tunc binomium illud reducatur ad monomium rationale *per Cor.* 1. *Prop.* 4. *hujus*, multiplicando illud per sui contrarium $\sqrt{5}+\sqrt{2}$, habebitur novus divisor $5-2=3$. Deinde per idem contrarium $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ multiplicetur quoque quantitas dividenda, nempe $\sqrt{18}$, ut inter ipsam & divisorem maneat idem valor, qui antea, *per Axiom.* 2. *Cap.*2. Exemplo res fit manifesta.

Divisor $\sqrt{5}-\sqrt{2}$	Dividen. $+\sqrt{18}$
$\sqrt{5}+\sqrt{2}$	$\sqrt{5}+\sqrt{2}$
$5-\sqrt{10}$	3) $\sqrt{90}+6$
$+\sqrt{10}-2$	
$5-2=3$	Quotus $\frac{1}{3}\sqrt{90}+2$

Ratio clara est, si ex divisore & dividendo fiat fractio, & tam numerator quam denominator multiplicentur per eandem quantitatem. Sit enim dividenda radicalis quantitas A per trinomium radicale B; fiat fractio, nempe

$$\frac{A}{B}\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{1}+\sqrt{2}}$$

 Multi-

Multiplicato utroque fractionis termino per denominatorem B (uno tantum signo mutato), oritur nova fractio æqualis priori *per Axiom.* 2. *Cap.* 2. hoc est

$$\frac{C}{D}\ \frac{\sqrt{15}+\sqrt{5}-\sqrt{10}}{2+\sqrt{12}}$$

Multiplicetur pariter uterque terminus hujus novæ fractionis per denominatorem D (mutato signo), oritur nova fractio priori æqualis *per Axiom. cit.*, in qua divisor est quantitas rationalis, scilicet

$$\frac{2\sqrt{15}+2\sqrt{5}-2\sqrt{10}-\sqrt{180}-\sqrt{60}+\sqrt{120}}{-8}$$

Factaque actu divisione, erit quotus

$$-\tfrac{1}{4}\sqrt{15}-\tfrac{1}{4}\sqrt{5}+\tfrac{1}{4}\sqrt{10}+\tfrac{1}{8}\sqrt{180}+\tfrac{1}{8}\sqrt{60}-\tfrac{1}{8}\sqrt{120}.$$

Item, ut dividatur $a-b$ per $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, fit fractio $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, cujus termini per $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ multiplicati dant $\frac{\overline{a-b}\times\overline{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{a-b}$: fiat divisio, erit quotus $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

SCHOL. I. *Si divisor sit binomium, aut trinomium constans radicalibus cubicis, aut altiorum potestatum, hæc regula non sufficit. Tunc invenienda est aliqua quantitas, quæ* divisor contrarius *dicitur, per quam si tale binomium, aut trinomium multiplicetur, fiat rationale. En methodus generalis inveniendi ejusmodi* divisores contrarios. *Quantitates sub signo radicali existentes, mutato aliquo signo, eleventur ad potestatem, cujus exponens sit unitate minor*

expo-

exponente radicali, neglectisque coefficientibus, habetur quantitas quaesita. Sit binomium $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, *elevetur* a—b (*mutato scilicet signo*) *ad potestatem secundam, quae neglectis coefficientibus, erit* $a^2 - ab + b^2$, *eaque posita sub signis radicalibus dati binomii, habetur* divisor contrarius $\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$.

Similiter sit datum binomium $\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$, *elevetur* a—b *ad tertiam potestatem, & abjiciantur coefficientes, oritur quantitas* $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$, *qua sub signis radicalibus binomii posita, habetur* divisor contrarius $\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{a^2b} + \sqrt[4]{ab^2} - \sqrt[4]{b^3}$; *& sic de aliis.*

SCHOL. II. *Ceterum hujusmodi divisiones radicalium compositorum, ut monet* Cl. Wolfius ([a]), *aut vix, aut perraro occurrunt. Sed quia ejus methodus, quam* Nicolao Tartaleæ ([b]) *debemus, est non inelegans, haud erat omnino negligenda.*

PROPOSITIO VII.

Radicales ad datam potestatem elevare.

I. Regula est: quantitates sub signis existentes ad datam potestatem attolluntur *per Prop. 2., vel 3. Cap. 3.* radicali signo minime variato. Sit radicalis $\sqrt[3]{a}$, elevata

(a) Elemen. Analy. edit. 2. Probl. 13. schol. 1. (b) De Num. & mensuris par. 2. l. 5. Cap. 4.

vata ad quadratum erit $\sqrt[3]{a^2}$. Radicalis $\sqrt[2]{b}$ elevata ad cubum dat $\sqrt[2]{b^3}$. Item $\sqrt[2]{3}$ elevata ad quartam potestatem fit $\sqrt[2]{81}$.

Ratio est, quia ex communi lege multiplicationis radicalium, $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^2}$. Similiter $\sqrt[2]{b} \times \sqrt[2]{b} \times \sqrt[2]{b} = \sqrt[2]{b^3}$ *per Prop.* 4. *hujus*.

II. Si adsit quantitas extra signum, illa quoque ad datam potestatem elevatur *per Prop.* 2., *vel* 3. *Cap.* 3. Sic radicalis $a\sqrt[3]{c}$ ad quadratum elevata, erit $a^2\sqrt[3]{c^2}$. Nam $a\sqrt[3]{c} \times a\sqrt[3]{c} = a^2\sqrt[3]{c^2}$. Eadem ratione $2\sqrt[2]{a}$ ad cubum evecta erit $8\sqrt[2]{a^3}$. Nam $2\sqrt[2]{a} \times 2\sqrt[2]{a} \times 2\sqrt[2]{a} = 8\sqrt[2]{a^3}$ *per Prop.* 4. *hujus*.

III. Si radicales ad datam potestatem elevandæ sint complexæ, elevantur ad illam eadem omnino ratione, qua elevantur quantitates rationales; hoc est, si elevandæ sint ad quadratum, sumi debent quadrata partium, & duplum ejus, quod oritur ex mutua earundem partium multiplicatione *per Cor. Prop.* 8. *Cap.* 3. Si ad cubum, sumi debent cubi partium, triplum ejus, quod oritur multiplicando quadratum primæ per secundam, & triplum ejus, quod oritur multiplicando vicissim quadratum secundæ per primam *per Cor. Prop.* 9. *Cap.* 3. Atque ita deinceps. Sic radicalis $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{c}$, ut ad secundam potestatem elevetur, fiant per primam

par-

partem *Prop. hujus* quadrata partium, nempe $\sqrt{a^2}$ & $\sqrt{c^2}$ earumque factum duplum $2\sqrt[3]{ac}$, proinde erit $\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{ac}+\sqrt[3]{c^2}$. Similiter $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ad secundam potestatem evecta erit $a-2\sqrt{ab}+b$. Si vero $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ elevanda sit ad cubum, fiant primò per primam partem *Prop: hujus* cubi ex $\sqrt{a}$ & $\sqrt{b}$, nempe $\sqrt{a^3}$ & $\sqrt{b^3}$; sumatur triplum ex multiplicatione quadrati primæ radicalis, nempe a, in secundam, hoc est $3a\sqrt{b}$, & vicissim triplum quadrati secundæ, nempe b, ducti in primam, hoc est $3b\sqrt{a}$, iisque additis, erit $\sqrt{a^3}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}+\sqrt{b^3}$. Eadem ratione $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ad cubum evecta, erit $\sqrt{27}+9\sqrt{2}+6\sqrt{3}+\sqrt{8}$.

SCHOL. I. *Cum radicales simplices considerari possint ut potentiæ imperfectæ* per Defin. 5. Cap. 3. *elevari possunt ad quancunque datam potestatem, sumendo duplum, triplum, quadruplum &c. earum exponentium, si ad secundam, ad tertiam, vel quartam potestatem elevandæ sint. Nam sit* $\sqrt[2]{a}$ *ad tertiam potestatem elevanda*, per Def. cit. *est* $\sqrt[2]{a}=a^{\frac{1}{2}}$, *& sumendo triplum hujus exponentis, erit* $a^{\frac{3}{2}}=\sqrt[2]{a^3}$. *Hoc autem sequitur* ex Prop. 1. Cap. 3. *Nam* $a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{3}{2}}$.

SCHOL. II. *Si radicalis elevanda sit ad potestatem, cujus exponens idem sit cum exponente ejusdem radicalis, oritur quantitas rationalis. Proinde satis est delere signum radi-*

radicale. *Nam* $\sqrt[2]{3} \times \sqrt[2]{3} = \sqrt[2]{9} = 3$. *Sic etiam* $\sqrt[3]{2}$ *ad cubum evecta erit* 2. *Nam* $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$. *Quod etiam* ex Schol. 1. *infertur*. *Nam* $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$, *proinde* $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a$. *Pariter* $\sqrt[3]{c} = c^{\frac{1}{3}}$, *quæ ad tertiam potestatem evecta fit* $c^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = c^{\frac{3}{3}} = c$.

PROPOSITIO VIII.

Ex simplici radicali radicem extrahere.

I. EXtrahenda sit radix quadrata ex $\sqrt{a}$, quia *per Defin.* 5. *Cap.* 3. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, dividatur per exponentem radicis quæsitæ exponens ipsius $a^{\frac{1}{2}}$, erit radix quadrata quæsita $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$.

Similiter extrahenda sit radix quadrata ex $\sqrt[3]{a}$, quia *per Defin. cit.* $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, dividendo per exponentem radicis quæsitæ exponentem ejusdem $a^{\frac{1}{3}}$, erit radix quæsita $a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$.

II. Demum quæritur radix cubica quantitatis $\sqrt{a}$, quia $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ si dividatur per exponentem radicis quæsitæ 3 exponens ipsius $a^{\frac{1}{2}}$, erit radix cubica $a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$. Co-

CoROLL. *Hinc patet, ad extrahendas ejusmodi radices satis esse multiplicare exponentem signi radicalis per exponentem radicis quaesitae. Sic radix quinta quantitatis* $\sqrt[2]{2}$ *erit* $\sqrt[10]{2}$. *Vel etiam exprimi potest sic* $\sqrt[5]{\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\sqrt{2}}$ &c.

PROPOSITIO IX.

Ex binomio radicem quadratam extrahere.

I. Extrahenda sit radix quadrata ex binomio dato $7 + \sqrt{48}$. Primo auferatur quadratum minoris termini ex quadrato majoris, hoc est 48 ex 49 quadrato, quod fit ex termino rationali 7. Secundo extrahatur ex differentia horum quadratorum (quae hic est 1) radix quadrata, nempe 1, quam adde termino rationali, habebis 8, & ab eodem subtrahe, habebis 6. Summae hujus & differentiae semisses, hoc est 4 & 3 dant radicem quadratam dati binomii, nempe $\sqrt{4} + \sqrt{3}$, seu $2 + \sqrt{3}$.

Similiter quaeritur radix quadrata binomii $8 - \sqrt{60}$. Differentia quadratorum est 4, ejus radix quadrata 2. Hanc adde termino rationali, habebis 10: subtrahe ab eodem, habebis 6. Semisses ipsorum 10 & 6 dant radicem quaesitam $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

II. Sit pariter extrahenda radix quadrata ex binomio $a + b - 2\sqrt{ab}$: ex quadrato $a^2 + 2ab + b^2$ primi termini aufer $4ab$ quadratum secundi termini $-2\sqrt{ab}$, erit

differentia $a^2 - 2ab + b^2$, cujus radix quadrata est $a - b$. Hanc adde termino rationali $a + b$, summa erit $2a$: subtrahe ex eodem termino, differentia erit $2b$. Horum semisses a & b dant radicem quæsitam $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Ex hoc tertio exemplo facile eruitur demonstratio. Nam si binomium $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ elevetur ad secundam potestatem habetur $a + b - 2\sqrt{ab}$; ubi apparent duo termini, alter rationalis, continens summam radicum $a + b$, alter irrationalis continens duplum facti earundem radicum. Ex quadrato autem $a^2 + 2ab + b^2$, quod fit ex termino rationali, si auferatur quadratum secundi termini, nempe $4ab$, residuum $a^2 - 2ab + b^2$ est pariter quadratum, cujus radix quadrata $a - b$ est differentia quadratorum a & b. Hæc igitur differentia $a - b$ addita ad eorum summam $a + b$ dat $2a$, duplum scilicet quadrati ex $\sqrt{a}$; eademque differentia $a - b$ subducta ex eorum summa $a + b$ relinquit $2b$, duplum quadrati alterius membri $\sqrt{b}$; proinde horum semisses a & b dant terminos radicis quæsitæ $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Coroll. *Hinc infertur tria requiri, ut radix quadrata extrahi possit ex binomio radicali quadratico. Primo binomium constare non potest solis radicalibus, sed uno membro rationali & altero radicali. Nam sive fiat quadratum ex duobus terminis radicalibus, ut* $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, *sive ex rationali & radicali, ut* $3 + \sqrt{5}$; *semper oritur binomium continens terminum rationalem & alterum radicalem. Secundo terminus rationalis, seu quadratum illius semper debet esse majus termino radicali, qui ab eo debet*

bet ſubtrahi. Tertio differentia quadratorum, quæ fiunt ex termino rationali & radicali, debet eſſe quadratum. Hæc omnia ex allatis exemplis ſatis patent.

SCHOL. *De radice cubica, aliiſque altioris gradus ex dato binomio, aut polynomio extrahendis, commodiori loco agemus. Ceterum ſi radix quadrata defectu earum conditionum extrahi nequeat ex dato binomio, tunc ejus binomii radix exprimitur ſigno radicali, quod utrunque binomii terminum comprehendit. Sic radix quadrata binomii* $1+\sqrt{3}$ *erit* $\sqrt{1+\sqrt{3}}$. *Idem dicendum de cubica, aliiſque altioribus radicibus, ſi extrahi nequeant. Tunc enim radix cubica binomii* $2-\sqrt{7}$ *erit* $\sqrt[3]{2-\sqrt[2]{7}}$ *&c. quæ quidem radices ita connexæ, dicuntur* radices univerſales, *de quibus inferius.*

PROPOSITIO X.

Ex binomio, aut polynomio radicem quadratam per formulam Newtonianam extrahere.

I. DEſignet A majorem dati binomii partem, B vero partem minorem; erit ex Newtono in *Arithmetica Univerſali* $\frac{A+\sqrt{AA-BB}}{2}$ quadratum majoris partis quæſitæ radicis, & $\frac{A-\sqrt{AA-BB}}{2}$ quadratum partis minoris, quæ cum majori annectenda eſt cum ſigno ipſius B.

 Extra-

Extrahenda ſit radix ex binomio $5+\sqrt{24}$: ponatur $A=5$, & $B=\sqrt{24}$, erit $\sqrt{AA-BB}=1$, proinde $\frac{A+\sqrt{AA-BB}}{2}=\frac{5+1}{2}$ hoc eſt 3, quadratum majoris partis radicis; & $\frac{A-\sqrt{AA-BB}}{2}=\frac{5-1}{2}=2$, quadratum partis minoris. Horum radices dant radicem quæſitam $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

II. Rurſus extrahenda ſit radix ex binomio $rr+2x\sqrt{rr-xx}$. Ponatur $A=rr$, & $B=2x\sqrt{rr-xx}$, erit $AA-BB=r^4-4rrxx+4x^4$, cujus radix $rr-2x^2=\sqrt{AA-BB}$; proinde $\frac{A+\sqrt{AA-BB}}{2}=\frac{2rr-2xx}{2}=rr-xx$. Similiter $\frac{A-\sqrt{AA-BB}}{2}=xx$. Ex horum radicibus habetur dati binomii radix $x+\sqrt{rr-xx}$.

III. Sit polynomium $10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}$, ſeu in terminis ſimplicioribus $10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}$ *per Prop. 2. hujus*. Intelligatur diviſum in duo binomia; & ponatur $10+2\sqrt{6}=A$, & $2\sqrt{10}+2\sqrt{15}=B$, erit $\sqrt{AA-BB}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ *per Prop. cit.* Nam ſi quadratum ſecundi termini $2\sqrt{10}+2\sqrt{15}$, quod in terminis ſimplicioribus eſt $100+40\sqrt{6}$, auferatur ex quadrato primi termini $10+2\sqrt{6}$, quod pariter in terminis ſimplicioribns eſt $124+40\sqrt{6}$, reſiduum erit 24, hoc eſt $2\sqrt{6}$ *per Prop. cit.* Addatur ergo hoc reſiduum $2\sqrt{6}$ ad pri-

ad primum terminum $10+2\sqrt{6}$, erit $\frac{A+\sqrt{AA-BB}}{2}$ $=\frac{10+4\sqrt{6}}{2}=5+2\sqrt{6}$. Ex hoc autem binomio si ex prima parte *hujus Propos.* eruatur radix, habebitur $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. Auferatur jam residuum ipsum $2\sqrt{6}$ ex primo termino $10+2\sqrt{6}$, erit $\frac{A-\sqrt{AA-BB}}{2}=\frac{10}{2}=5$, cujus radix quadrata, hoc est $\sqrt{5}$, si priori jam inventæ addatur, erit polynomii propositi radix quæsita $\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

Demonstratio hujus methodi eadem est, ac superioris, ut consideranti patet.

PROPOSITIO XI.

Radicales universales ad idem nomen, & ad simpliciorem expressionem reducere.

I. Reducuntur ad idem nomen radicales universales eodem modo, quo aliæ radicales, ut in *Prop.* 1. *hujus*. Sed claritatis gratia reducendæ sint ad eandem denominationem $\sqrt[2]{\overline{b+\sqrt[2]{cd}}}$ & $\sqrt[3]{\overline{a-\sqrt[3]{bc}}}$. Fractiones radicalium exponentiales $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ reducantur ad idem nomen, ut fit in communi Arithmetica, erunt novi exponentes $\frac{3}{6}$ & $\frac{2}{6}$, qui docent signum radicale commune esse $\sqrt[6]{\ }$, & quantitatem $b+\sqrt[2]{cd}$ elevandam esse ad tertiam potestatem; quantitatem vero $a-\sqrt[3]{bc}$ ad secundam. Facta

cta itaque operatione, habentur aliæ duæ radicales universales æquales prioribus & ejusdem nominis, nempe $\sqrt[6]{b^3+3bcd+\overline{3b^2+cd}\times\sqrt{cd}}$ & $\sqrt[6]{a^2-2a\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{b^2c^2}}$.

Radicales autem illæ, quæ sub signo universali $\sqrt[6]{}$ comprehenduntur, hoc est $\sqrt[2]{cd}$, $\sqrt[3]{bc}$, & $\sqrt[3]{b^2c^2}$, reduci facile possunt ad idem signum $\sqrt[6]{}$ *per Schol. Prop. 1. hujus*: erunt $\sqrt[2]{cd}=\sqrt[6]{c^3d^3}$, $\sqrt[3]{bc}=\sqrt[6]{b^2c^2}$, & $\sqrt[3]{b^2c^2}=\sqrt[6]{b^4c^4}$.

II. Reducenda sit ad simpliciorem expressionem radicalis universalis ex. gr. $\sqrt{a^2b+a^2c\sqrt{d}}$. Dividatur a^2b+a^2c per a^2; & relicto quoto sub signo universali, ponatur a extra signum, fiet $a\sqrt{b+c\sqrt{d}}$ ad terminos simpliciores redacta.

Similiter sit radicalis universalis $\sqrt[2]{b^2c+\sqrt{b^4c^2d}}$ reducenda ad simpliciorem. Reducatur primo $\sqrt{b^4c^2d}$, dividendo illam per b^4c^2, fiet $b^2c\sqrt{d}$, quæ si reponatur sub signo universali, erit $\sqrt[2]{b^2c+b^2c\sqrt{d}}$: hac demum ad simpliciorem redacta, eam scilicet dividendo per b^2, habebitur $b\sqrt{c+c\sqrt{d}}$, id quod quærebatur. Si fuerit $\sqrt{8+4\sqrt{3}}$, erit eadem ratione $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Similiter $\sqrt{9\sqrt{12}}$, fiet $3\sqrt{2\sqrt{3}}$.

Co-

COROL. I. *Si habeatur radicalis universalis* $a\sqrt[2]{b+c\sqrt{d}}$ *& ponenda sit sub signo universali quantitas* a, *multiplicari debet per secundam potestatem ipsius* a, *nempe per* a^2, *tota quantitas* $b+c$; *unde oritur* $\sqrt{a^2b+a^2c\sqrt{d}}$. *Quod si iterum quantitas* a^2c *ponenda esset sub secundo signo, elevanda hæc esset pariter ad secundam potestatem, & tunc haberetur* $\sqrt{a^2b+\sqrt{a^4c^2d}}$. *Hinc luculenter apparet ratio explicatæ reductionis.*

COROLL. II. *Hoc totum convenit tam radicalibus universalibus, quæ habent idem signum radicale* $\sqrt[m]{a+\sqrt[m]{b}}$, *quam iis, quarum exponens est diversus, ut* $\sqrt[m]{a+\sqrt[n]{b}}$, *habita tamen ratione eorum, quæ dicta sunt* in Prop. 2. hujus *de reductionibus.*

PROPOSITIO XII.

Radicalium universalium calculus.

I. UT addantur, vel subtrahantur, reduci semper debent ad idem nomen & ad simpliciorem expressionem, si fieri possit, *per Prop. antec.* Deinde per signa + & — habetur additio, vel subtractio, ut in ceteris radicalibus. Sint addenda $3\sqrt{a+b\sqrt{c}}$ & $2\sqrt{bc+\sqrt{d}}$, summa erit $3\sqrt{a+b\sqrt{c}}+2\sqrt{bc+\sqrt{d}}$; residuum erit $3\sqrt{a+b\sqrt{c}}$ $-2\sqrt{bc+\sqrt{d}}$.

II. Quod

II. Quod ſi radicales habeant ſub ſignis quantitates eaſdem, adduntur, vel ſubtrahuntur earum coefficientes. Sic $\sqrt{8+\sqrt{96}}$ & $\sqrt{18+\sqrt{6}}$ (quæ ſunt $2\sqrt{2+\sqrt{6}}$ & $3\sqrt{2+\sqrt{6}}$ *per Propoſ. antec.*) ſumma erit $5\sqrt{2+\sqrt{6}}$; reſiduum vero (ſubtrahendo primam ex ſecunda) erit $1\sqrt{2+\sqrt{6}}$.

III. Sit multiplicanda $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ per $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, deleto ſigno univerſali, multiplicantur mutuo quantitates, & facto præfigitur ſignum radicale univerſale.

Exempl. I.

$$\begin{array}{l} 3+\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{2} \\ \hline 6+2\sqrt{5} \\ \quad +3\sqrt{2}+\sqrt{10} \\ \hline \sqrt{6+2\sqrt{5}+3\sqrt{2}+\sqrt{10}} \end{array}$$

Exempl. II.

$$\begin{array}{l} \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}} \\ \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}} \\ \hline \tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{2}q\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3} \\ \quad +\tfrac{1}{2}q\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}+\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3 \\ \hline \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q^2-\tfrac{1}{27}p^3+q\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}} \end{array}$$

IV. Si vero radix univerſalis per ſe ipſam multiplicanda ſit, & ſignum univerſale ſit potentiæ ſecundæ ſignum $\sqrt{\ }$, tunc

tunc habetur productum, deleto signo ipso universali, quod præcedit, reliquis radicalibus, cujuscunque gradus sint, minime immutatis. Sic $\sqrt{\frac{1}{4}+\sqrt{101}} \times \sqrt{\frac{1}{4}+\sqrt{101}}$, deleto signo universali, dat productum $\frac{1}{4}+\sqrt{101}$. Similiter $\sqrt[2]{7+\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{5}} \times \sqrt[2]{7+\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{5}}$ dat productum $7+\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{5}$. Ratio est, quia summa illa terminorum $7+\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{5}$ ex hypothesi erat quadratum. Deleto itaque signo radicali quadratico, habetur quadratum, hoc est quantitas illa in se ducta.

V. Dividenda sit radicalis universalis $\sqrt{15+\sqrt{7}}$ per $\sqrt{3}$; divisis 15 per 3, & 7 per 3, habentur quoti 5 & $\frac{7}{3}$: quibus si præponantur signa radicalia, erit quotus quæsitus $\sqrt{5+\sqrt{\frac{7}{3}}}$.

VI. Quod si divisor sit binomium, aut polynomium, ut si dividenda sit $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ per $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, deleto signo universali, multiplicatur per quantitatem contrariam tam divisor, quam dividendus, ut docuimus *Prop.6. hujus*. Fiet novus divisor $=1$, & dividendus $\sqrt{6+\sqrt{20}-\sqrt{27}-\sqrt{15}}$. Ecce exemplum

Divisor	$2+\sqrt{3}$	$3+\sqrt{5}$
	$2-\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
	$4+2\sqrt{3}$	$6+2\sqrt{5}$
	$-2\sqrt{3}-3$	$-3\sqrt{3}-\sqrt{15}$
	$4-3=1$	$\sqrt[2]{6+2\sqrt{5}-3\sqrt{3}-\sqrt{15}}=$
	Quantitas dividen.	$\sqrt[2]{6+\sqrt{20}-\sqrt{27}-\sqrt{15}}$.

N SCHOL.

Schol. *Ceterum hujusmodi calculus raro occurrit. Interea tamen tyrones in eodem exerceri non erit inutile.*

PROPOSITIO XIII.

Radicum, quae imaginariae dicuntur, calculum expedire.

I. Radices imaginariæ ad idem signum radicale & ad simpliciorem expressionem, si fieri id possit, reducuntur; tum etiam adduntur, & invicem subtrahuntur iisdem omnino regulis, quas pro ceteris radicalibus tradidimus, ideoque iis non immoramur.

II. Si vero multiplicandæ sint, & ambæ habeant sub signo eandem quantitatem, observetur, an signa radicalia præferant idem signum $+$, aut $-$, an vero diversum. Nam in primo casu productum erit reale negativum, in secundo reale positivum. Ecce exempla

$$+1\sqrt{-a}\times+1\sqrt{-a}=+1\times-a=-a$$
$$-1\sqrt{-a}\times-1\sqrt{-a}=+1\times-a=-a$$
$$+1\sqrt{-a}\times-1\sqrt{-a}=-1\times-a=+a$$

Idem omnino fit, etiamsi desit unitas, quæ semper intelligitur adesse tanquam radicalium coefficiens, si nullum aliud adsit coefficiens, scilicet

$$+\sqrt{-a}\times+\sqrt{-a}=+\times-a=-a$$
$$-\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}=+\times-a=-a$$
$$+\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}=-\times-a=+a$$

Ratio horum est, quia quod oritur ex $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$, semper

per eſt $-a$, utpote quadratum negativum. Sed hoc ipſum productum negativum duci debet ulterius in ſignum illud $+$, aut $-$, quo ſigna radicalia afficiuntur, proinde ex communi lege multiplicationis ducendo $-a$ in $+$, habetur $-a$, ut in primo & ſecundo exemplo, & in utroque caſu reſtituitur quantitas realis negativa $-a$. At vero ducendo $-a$ in $-$ oritur quantitas poſitiva $+a$, ut in tertio exemplo.

III. Si vero quantitas ſub ſigno non eſt eadem, aut ſi multiplicanda ſit radix imaginaria per realem; ut tollatur omne æquivocum, præſtat factum exprimere per ſignum multiplicationis $\times$. Multiplicanda ſit $a\sqrt{-a}$ per $-\sqrt{-b}$, productum erit $-a\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$, non autem $-a\sqrt{+ab}$. Per multiplicationem enim radicalium imaginariarum non oritur quantitas realis negativa, niſi cum ipſa radix imaginaria elevatur ad poteſtatem, cujus exponens ſit idem cúm exponente ſigni radicalis. Sic $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$ producit quantitatem realem negativam $-a$, ut ſupra explicavimus. In aliis vero caſibus habetur quantitas imaginaria; ut ſi multiplicetur $\sqrt[2]{-b}$ per $\sqrt[2]{b}$, productum, quod oritur $\sqrt[2]{-b^2}$, continet radicem imaginariam, ita ut ſi ponere velis b extra ſignum, neceſſario exprimi debeat $b\sqrt{-1}$; ut nimirum ſervetur ratio radicis imaginariæ; nec ipſa quantitas imaginaria b confundatur cum quantitatibus realibus. Proinde ad evitandam confuſionem, quæ dari facile poſſet, præſtat multiplicationem peragere ſigno $\times$. Ecce exempla

$$+a\sqrt{a}\times-\sqrt{-b}=-a\sqrt{a}\times\sqrt{-b}$$
$$+2\sqrt{3}\times-1\sqrt{-5}=-2\sqrt{3}\times\sqrt{-5}$$
$$+3\sqrt{-c}\times-2=-6\sqrt{-c}$$

IV. Similì ratione expedit diviſionem per modum fractionis

ctionis exprimere ad confusionem evitandam. Dividendo $\sqrt{-a}$ per $\sqrt{-b}$, quotus erit $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$. Item dividendo $\sqrt{-3}$ per $\sqrt{-5}$, erit quotus $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-5}}$. Sic $\frac{c}{\sqrt{-a}}$ & $\frac{\sqrt{-n}}{\sqrt{m}}$ significant quantitatem realem divisam per imaginariam, & imaginariam per realem, ut patet.

V. Quod si eadem quantitas imaginaria tam in numeratore, quam in denominatore reperitur, ex communi lege divisionis utrinque deletur. Sic dividendo $a\sqrt{-d}$ per $b\sqrt{-d}$, scribatur $\frac{a\sqrt{-d}}{b\sqrt{-d}}$, quotus erit $\frac{a}{b}$. Item si dividatur $-b$ per $\sqrt{-b}$, prodit quotus $\sqrt{-b}$. Nam si fiat $-b = \sqrt{-b} \times \sqrt{-b}$, erit $\frac{\sqrt{-b} \times \sqrt{-b}}{\sqrt{-b}} = \sqrt{-b}$, quotus quæsitus. Dividendo autem $\sqrt{-b}$ per $-b$, erit divisio $\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-b} \times \sqrt{-b}} = \frac{1}{\sqrt{-b}}$ quotus. Similiter quotus ex quantitate $a\sqrt{-bb}$ divisa per $-bb$, erit $\frac{a\sqrt{-bb}}{\sqrt{-bb} \times \sqrt{-bb}} = \frac{a}{\sqrt{-bb}}$. Tandem dividendo $+\sqrt{-3}$ per $-\sqrt{-3}$, erit quotus -1. Nam $\frac{+1\sqrt{-3}}{-1\sqrt{-3}} = \frac{+1}{-1} = -1$.

SCHOL *Quidam non obscuri nominis Algebristæ docent productum ex multiplicatione duarum quantitatum imaginariarum, aut quotum ex divisione illarum, esse quantitatem veram & realem. Sic multiplicando v.g.* $\sqrt{-3}$ *per*

$\sqrt{-2}$

$\sqrt{-2}$ *oriri* $\sqrt{6}$, *non autem* $\sqrt{-6}$. *Similiter dividendo* $\sqrt{-6}$ *per* $\sqrt{-2}$ *oriri quotum realem* $\sqrt{3}$, *non autem* $\sqrt{-3}$. *Proinde libere asserunt hallucinatum fuisse* Jac. Ozananum ([a]) *qui contrarium docuit. At quicquid illi dicant*, Ozananum *sequitur* Cl. Wolfius ([b]) *Mathematicus nostri temporis celebratissimus, qui contendit in multiplicatione quantitatum imaginariarum signum negativum non esse mutandum, sed facto perinde ac factoribus præfigi debere semper signum* —. Alias enim, *inquit*, factores imaginarii efficerent factum reale, quod est absurdum. *Quamobrem vult signorum regulam observari tantum respectu radicum, minime vero respectu quantitatum sub signo radicali existentium. Placet hic unum, vel alterum ipsius exemplum multiplicationis afferre.*

EXEMPL. I.

$$\begin{array}{r} \sqrt{-3}+\sqrt{-2} \\ +\sqrt{-3} \\ \hline -3+\sqrt{-6} \end{array}$$

EXEMPL. II.

$$\begin{array}{r} 3\sqrt{-5}+2\sqrt{-3} \\ 3\sqrt{-5}-2\sqrt{-2} \\ \hline -45+6\sqrt{-15} \\ -6\sqrt{-10}-4\sqrt{-6} \\ \hline -45+6\sqrt{-15}-6\sqrt{-10}-4\sqrt{-6} \end{array}$$

COROLL. *Ex allatis exemplis satis liquet, quantitates imaginarias complexas eodem modo multiplicari, ac ceteras*

([a]) Nouveaux Elemens liv. 1. sect. 4. ([b]) Elementa Analy. edit. 2. cap. 2. pag. m. 315.

ras radicales complexas. Exercitationis tamen gratia nonnulla adducimus tam multiplicationis, quam divisionis complexæ exempla, in quibus quantitates imaginariæ realibus adhærent. A *est quantitas multiplicanda*, B *multiplicans*, P *vero productum*.

Exempl. I.

$$\begin{array}{ll} A & \sqrt{a}-2\sqrt{-b} \\ B & \sqrt{c}+3\sqrt{-b} \\ \hline & \sqrt{ac}-2\sqrt{c}\sqrt{-b} \\ & \quad +3\sqrt{a}\sqrt{-b}+6\times-b=+6b \\ \hline P & \sqrt{ac}-2\sqrt{c}\sqrt{-b}+3\sqrt{a}\sqrt{-b}+6b \end{array}$$

Exempl. II.

$$\begin{array}{ll} A & 2+\sqrt{-5} \\ B & 3-\sqrt{-2} \\ \hline & 6+3\sqrt{-5} \\ & -2\sqrt{-2}-\sqrt{-2}\times\sqrt{-5} \\ \hline P & 6+3\sqrt{-5}-2\sqrt{-2}-\sqrt{-2}\times\sqrt{-5} \end{array}$$

Divisionis exempla, in quibus *A* significat dividendum, *D* divisorem, *Q* quotum; zeri autem quantitates ex actuali divisione deletas.

Exemplum I.

$$\begin{array}{ll} A & x^2-ax-x\sqrt{-b}+x\sqrt{-c}-a\sqrt{-c}-\sqrt{-b}\times\sqrt{-c} \\ & \;\;0 \quad\;\; 0 \qquad\;\; 0 \qquad\;\;\; 0 \qquad\qquad 0 \qquad\;\; 0 \qquad\; 0 \\ \hline D & x+\sqrt{-c} \\ Q & x-a-\sqrt{-b} \end{array}$$

Exem-

EXEMPLUM II.

$A \quad 9\sqrt{-30} - 6\sqrt{-10} + 6\sqrt{-18} - 4\sqrt{-6}$

o o o o

$D \quad 3\sqrt{-5} + 2\sqrt{-3}$

$Q \quad 3\sqrt{-6} - 2\sqrt{-2}$

CAPUT V.

De Æquationibus simplicibus.

DEFINITIONES.

I. ÆQuatio est comparatio duarum quantitatum, quæ signo æqualitatis junguntur, ut $x = a$, $xx + 2ax = ab$ &c.

II. Quantitates, quæ præcedunt, & quæ consequuntur æqualitatis signum, ut x & a in prima æquatione, item $xx + 2ax$ & ab in secunda, dicuntur *membra æquationis*.

III. Æquatio dicitur *simplex*, seu *primi gradus*, ubi quantitas incognita sit unius dimensionis, ut $x = a + b + c$: dicitur *quadratica*, seu *secundi gradus*, si ad duas dimensionis assurgit, ut $xx = ab$: *cubica*, seu *tertii gradus* cum ad tres dimensiones, ut $x^3 = a^2 + b^2$, & generatim dicitur æquatio *quarti*, *quinti*, *sexti gradus &c.* si potestas incognitæ ad tales dimensiones ascendat: $x^n = a - b$ dicitur æquatio indeterminata, quæ determinabitur, si fiat $n = 2$, $= 3$, $= 4$ &c.

IV.

IV. Æquatio dicitur *affecta*, cum incognitæ poteſtas diverſos habet dimenſionis gradus, ut $x^2+ax=ab$, $x^3-ax^2+bx=cd$ &c. unde dicuntur affectæ quadraticæ, affectæ cubicæ &c. Dicitur autem *pura*, cum incognitæ poteſtas eandem ſervat ubique dimenſionem, ut $ax+bx=cd$, $xx-bxx=cdd$, $x^3=abc$, &c.

V. Radix æquationis eſt valor incognitæ, quæ æquationem ingreditur; ut in æquatione $x=a+b$, radix eſt $a+b$: nam x tanti valet, quanti aggregatum $a+b$. Similiter in æquatione $x^2=a-c$, extracta utrinque radice quadrata, radix æquationis, ſeu valor incognitæ x, eſt $\sqrt{a-c}$.

VI. Si valor incognitæ fuerit poſitivus, ut $x=3$, radix dicitur *vera*. Si negativus, ut $x=-50$, radix dicitur *negativa*, ſeu, ut Carteſius vocat, *falſa*. Utraque tamen realis eſt. Nam ſi alteri debeam aureos 50, & non habeam, revera aſſeritur, me habere -50. Quod ſi incognitæ valor exprimatur per radicem quadratam negativam, ut $x=\sqrt{-a^2}$, radix dicitur *imaginaria*, & impoſſibilis, *per Schol.* 1. *Prop.* 8. *Cap.* 3.

AXIOMATA.

1. NOn tollitur æqualitas, ſi unus, aut quot placuerit, termini de uno æquationis membro ad alterum, mutatis ſignis, transferantur. Ut ſi $x+2=5$, non tollitur æqualitas, ſi fiat $x=5-2$.

2. Non tollitur æqualitas, ſi utrique æquationis membro addatur, aut ſubtrahatur quantitas æqualis. Vel ſi per eandem, aut æqualem quantitatem multiplicentur, aut dividan-

vidantur ambo æquationis membra. Nam sit $x = 3$, multiplicando per 3, erit $3x = 9$; aut dividendo per 3 erit $\frac{1}{3}x = 1$.

3. Non tollitur æqualitas, si utrunque membrum elevetur ad eandem poteſtatem; vel utrinque eadem radix extrahatur. Sit enim $y = ab$, erit $y^n = \overline{ab}^n$. Contra vero si $y^2 = a - b$, extracta radice utrinque, erit $y = \sqrt{a-b}$.

4. Non tollitur æqualitas, si in alterutro æquationis membro, loco unius quantitatis, sive complexæ, sive incomplexæ, ponatur alia quantitas æqualis. Ut si $x^2 = ay + by$, & ponatur $d = a + b$, erit $x^2 = dy$. Hoc dicitur *ſubſtituere*, quod in Analyſi magnum & perpetuum uſum habet, ut deinceps videbitur.

PROPOSITIO I.

Explicantur regulæ reductionis Æquationum.

Omnis æquatio continere ſolet quantitates notas cum incognitis permixtas ſecundum propoſiti problematis conditiones. Debent itaque quantitates illæ tandiu verſari & immutari, donec æquatio illa ſimpliciſſimam formam obtineat, quæ ſit velut ultima concluſio, ad quam tota problematis difficultas reducatur, eaque dicitur *æquatio finalis*. Hoc autem præſtant ſequentes regulæ.

*Reg.*ᵃ 1.ᵃ Æquatio reducitur ad pauciores terminos transferendo terminos illius ex una parte in aliam ſub ſigno contrario, nam *per Ax.* 1. remanet æqualitas. Sit $x - 3 = 12$, erit per tranſpoſitionem $x = 12 + 3$, hoc eſt $x = 15$.

$= 15$. Similiter si $x - b = a$, erit $x = a + b$. Patet ratio ex 2. *Ax.*, nam additur utrinque $+ 3$, & in secundo exemplo additur $+ b$.

Eadem ratione si fuerit $x + 3 = 5$, erit per transpositionem $x = 5 - 3$, hoc est $x = 2$. Item $x + b = a$, erit $x = a - b$. Patet ratio ex 2. *Axiom.* Nam subtrahitur utrinque $- 3$, & in secundo exemplo subtrahitur $- b$. Hæc transpositio vulgo *Antithesis* dicitur.

Reg.[a] 2.[a] Si sint fractiones, æquatio reducitur per multiplicationem, hoc est multiplicando terminos omnes per denominatores fractionum, ducendo scilicet omnes denominatores, unum post alium, in totam æquationem; seu, quod idem est, ducendo semel productum omnium denominatorum in æquationem, & deinde fractiones ad simplices terminos reducendo. Sit æquatio $\frac{abx}{c} + dx = \frac{bcd}{a}$, multiplicetur primo tota æquatio per c, deinde per a, vel semel per ac, & habetur $\frac{aabcd}{c} + acdx = \frac{abccd}{a}$, quæ, redactis terminis *per Propos.* 2. *Cap.* 2., erit $aabd + acdx = bccd$.

Similiter sit æquatio cum fractionibus, ut inferius *Probl.* 4.

$$a + \frac{x - a}{n} = \frac{2a + x - 3a - \frac{x + a}{n}}{n}$$

Multiplicetur primo per n, fit *per Axiom.* 4. *Cap.* 2.

$$an + x - a = 2an + x - 3a - \frac{x + a}{n}$$

Rur-

Rursus multiplicetur per n, erit

$$an^2 + nx - an = 2an^2 + nx - 3an - x + a$$

Ac deletis ex utraque parte terminis æqualibus, & ordinata æquatione, ut in *Coroll.* 1. & 3., quæ habentur in fine hujus, explicatur, fiet æquatio $x = an^2 - 2an + a$.

Regula hæc patet ex 2. *Axiom.* Multiplicatur enim tota æquatio per æqualia. Nam sublato denominatore, fractio multiplicata intelligitur *per Axiom.* 4. *Cap.* 2.

*Reg.*ª 3.ª Reductio fit dividendo utrunque membrum per eandem quantitatem, ut si fuerit $3x = 12$, dividendo per 3, erit $x = 4$ æquatio priori æqualis *per Axiom.* 2. Similiter sit $ax + bx = ac$, dividendo per $a + b$, erit $x = \frac{ac}{a+b}$. Demum $axx + fxx = gb$, erit $xx = \frac{gb}{a+f}$.

*Reg.*ª 4.ª Reducitur æquatio per elevationem terminorum ad aliquam potestatem, cum quantitas incognita signo radicali implicatur. Ut si fuerit $\sqrt{xx - aa} + b = c$, relinquatur ex una parte æquationis quantitas signo radicali affecta, ita ut sit $\sqrt{xx - aa} = c - b$: tum utraque pars æquationis elevetur ad quadratum, erit $xx - aa = c^2 - 2cb + b^2$. Similiter si fuerit æquatio $m - \sqrt{4dx + 4d^2} = \sqrt{2dx + d^2}$, elevato utroque membro ad quadratum, habetur

$m^2 - 2m\sqrt{4dx + 4d^2} + 4dx + 4d^2 = 2dx + d^2$; factaque reductione,

$$m^2 - 2m\sqrt{4dx + 4d^2} + 2dx + 3d^2 = 0$$

 Pona-

Ponatur seorsim in altero membro quantitas radicalis, quæ remanet, erit

$$m^2 + 2dx + 3d^2 = 2m\sqrt{4dx + 4d^2}$$

& rursus elevato utroque membro ad quadratum, evanescit quantitas radicalis, & habetur *per Lem. Cap.* 1.

$$m^4 - 12dxm^2 - 10d^2m^2 + 4d^2x^2 + 12d^3x + 9d^4 = 0.$$

Patet ex 3. *Ax.* Hoc vulgo dicitur, *Asymmetriam* tollere.

Reg.[a] 5.[a] Reducitur æquatio, cum ex utroque ejus membro extrahitur radix; ut si fuerit $xx = 16$, extracta utriusque radice, erit $x = 4$. Similiter æquatio $xx = a^2 - 2ab + b^2$, extracta radice fit $x = a - b$. Demum $x^3 = 125$, radice cubica extracta, fit $x = 5$. Sequitur ex 3. *Axiom.*

Reg.[a] 6.[a] Reducitur æquatio, seu plures æquationes ad unam, substituendo valorem unius incognitæ loco ipsius. Ut sit æquatio $x - y = d$, sit autem $a - x$ valor incognitæ y, qui substitui debet loco ipsius y: facta substitutione, habetur æquatio $x - a + x = d$, (variatis ob $-y$ signis in $a - x$) hoc est habetur *per Reg.* 1. $2x = a + d$, & *per Reg.* 3. $x = \frac{a+d}{2}$. Eadem ratione sit æquatio $x^2 + y^2 = d^2$, & $a - x$ valor ipsius y, qui ut substituatur loco $+y^2$, fiat quadratum ex $a - x$, nempe $a^2 - 2ax + x^2$: quo posito loco ipsius y^2, erit æquatio $x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = d^2$; seu $2x^2 - 2ax = d^2 - a^2$, & $x^2 - ax = \frac{d^2 - a^2}{2}$ *per Reg.* 1. *&* 3.

COROLL. I. *Ex Reg.* 1. *tria sequuntur valde utilia: primo relinquendo incognitam in una æquationis parte, &* transfe-

transferendo omnes alias quantitates in partem alteram, habetur valor illius incognitæ. Sic æquatio $x+y=100$ *per transpositionem fiet* $x=100-y$, *&* $100-y$ *dicitur valor incognitæ* x.

CoROLL. II. *Insuper quantitates negativæ fieri possunt positivæ, & e contrario; transferendo scilicet illas in partem oppositam sub signo contrario. Sic ut in æquatione* $a-x=b+c$, *incognita* x *fiat positiva, & haberi possit ejus valor, facta transpositione quantitatum in alteram partem sub signo contrario, erit* $a-b-c=x$.

CoROLL. III. *Cum in utroque membro occurrit eadem quantitas sub eodem signo, deleri potest utrinque, & æquatio simplicior fit, ut si fuerit* $xx+ab-c=d-c+ab$, *æquatio reducitur ad* $xx=d$.

SCHOL. *In reducendis æquationibus, illud primo curandum, ut omnes incognitæ, cujuscunque sint gradus, in uno eodemque æquationis membro consistant, in altero quantitates cognitæ, id quod per regulas jam traditas obtinetur.*

PROPOSITIO II.

Plures simplices æquationes ad unam reducere.

I. Sint reducendæ ad unam duæ æquationes simplices $x+y=a$ & $x-y=b$.

Addantur simul; summa erit $2x=a+b$. Vel subtrahatur secunda ex prima, habetur $2y=a-b$. Patet ex 3. *Axiom.*

II. Sint

II. Sint tres æquationes ad unam reducendæ

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x+y=a \\ \text{II.} & x+z=b \\ \text{III.} & y+z=c \end{array}$$

In prima æquatione sumatur valor incognitæ y *per Cor.* 1. *Prop. ant.* ita ut habeatur $y=a-x$, & in secunda valor incognitæ z, erit $z=b-x$. Deinde hi duo valores substituantur in tertia æquatione loco y & z *per Reg.* 6. habebitur $a-x+b-x=c$; & facta reductione, erit $a+b-c=2x$ *per Reg.* 1., seu $x=\frac{a+b-c}{2}$ *per Reg.* 3.

III. Sint plures æquationes ad unicam reducendæ, nempe A, B, C, D.

A	$x+y+z=a$	E	$x=a-y-z$
B	$x+y+v=b$		
C	$x+z+v=c$		
D	$y+z+v=d$		
F	$a-z+v=b$	H	$z=a+v-b$
G	$a-y+v=c$	M	$y=a+v-c$

$$N \quad 2a+3v-b-c=d$$

$$\text{hoc est} \quad v=\frac{b+c+d-2a}{3}$$

Sumatur ab æquatione A valor quantitatis x, qui *per Cor.* 1. *Prop. ant.* erit E: quo posito in æquationibus B & C, oriuntur duæ æquationes ejusdem valoris F & G. Sumatur deinde ex æquatione F valor incognitæ z, oritur æquatio

tio H. Similiter ex æquatione G ſumpto valore incognitæ y, habetur æquatio M. Hi duo valores ponantur in æquatione D, oritur æquatio N, in qua non eſt niſi unica incognita v, cujus valor $\frac{b+c+d-2a}{3}$ ſi ſubſtituatur in æquationibus H & M loco quantitatis v, ſtatim innoteſcunt z & y, quorum valor ſi tandem ponatur in æquatione E, nota erit quoque incognita x. Quod &c.

COROLL. *Ut hæc reductio fieri poſſit, neceſſe eſt, ut eadem incognita in pluribus æquationibus reperiatur, ut ex allatis exemplis manifeſtum eſt.*

IV. Quod ſi non omnes incognitæ ſint unius dimenſionis, ut in æquationibus A & B, quæ ſequuntur,

$$A \quad xyy = bc, \quad B \quad xx + yy = by - ax$$

in quibus una tantum incognita x eſt unius dimenſionis; tunc quæritur valor hujus, & in alia æquatione ſubſtituitur hac ratione:

Quia $xyy = bc$, erit $x = \frac{bc}{yy}$ *per Reg.* 3. & $xx = \frac{b^2c^2}{y^4}$ *per Ax.* 3. Item $ax = \frac{abc}{yy}$ *per Axiom.* 2. His valoribus in æquatione B ſubſtitutis *per Ax.* 4. habetur

$$\frac{b^2c^2}{y^4} + yy = by - \frac{abc}{yy}$$

Et multiplicando omnes terminos per y^4, ut fractiones extermineatur, oritur æquatio, in qua unica tantum incognita,

$$b^2c^2 + y^6 = by^5 - abcy^2$$

Sch. Prop. 1. $\quad y^6 - by^5 + abcy^2 = -b^2c^2$

PRO-

PROPOSITIO III.

Theoremata nonnulla explicantur, quæ æquationibus conficiendis inserviunt.

Theor. 1. IN proportione Arithmetica trium terminorum a, $a+1$, $a+2$, summa termini primi, & tertii æquatur duplo secundi, nempe $a+a+2$ (hoc est $2a+2$) $= 2a+2$. Item in numeris Arithmetice proportionalibus 7, 5, 3, erit $7+3=10$.

COROLL. I. *Semissis aggregati ex primo & tertio dat terminum secundum. Sic* $\frac{2a+2}{2} = a+1$. *Item* $\frac{7+3}{2} = 5$.

COROLL. II. *Datis duobus mediis quatuor continue proportionalium Arithmetice, ut* a, x, *facile innotescit primus, quem voco* y. *Nam si retrocedendo fiat* x.a∴a.y, *erit* per Theor. $x+y=2a$, & $y=2a-x$. *Eadem ratione innotescit etiam quartus, quem item voco* y. *Nam si fiat* a.x∴x.y, *erit* per Theor. $a+y=2x$, & $y=2x-a$. *Sunt ergo* $2a-x$, a, x, $2x-a$ *quatuor termini continue proportionales Arithmetice. Quod nota ex* Newtono ([a]).

Theor. 2. In proportione Arithmetica quatuor terminorum, summa duorum extremorum æquatur summæ duorum mediorum; ut si fuerint $a.a+1$ ∴ $a+2.a+3$. erit $2a+3=2a+3$. Sic etiam in numeris Arithmetice proportionalibus 2.5∴15.18, erit $2+18=15+5$.

Theor.

(a) Arithm. Univers. Probl. Geom. XIV.

Theor. 3. Quantitatum duarum inæqualium major eſt aggregatum ex ſemiſumma & ſemidifferentia earundem. Minor vero eſt differentia inter ſemiſummam & ſemidifferentiam earundem quantitatum. Sic diviſo 12 in partes inæquales 8 & 4, quarum ſemidifferentia eſt 2, major erit $6+2$, minor $6-2$.

COROL. *Si ponatur ſumma* $=2a$ *& differentia* $=2y$, *erit pars major* $a+y$, *minor* $a-y$. *At ſi ſemiſumma ponatur* x *& ſemidifferentia* y, *quantitas major erit* $x+y$, *minor* $x-y$. *Quod notetur*.

Theor. 4. In proportione Geometrica quatuor terminorum, factum ex duobus extremis æquatur facto ex duobus mediis; hoc eſt ſi $a.b::c.d$, erit $ad=bc$. *Eſt Propoſ.* 16. *l.* 6. *Eucl.*

COROLL. I. *Hinc ſemper quartus terminus proportionalis exprimi poteſt per factum ſecundi & tertii diviſum per primum. Sit enim* $a.b::c.d$, *erit ex* hoc Theor. $bc=ad$ *& dividendo utrunque per* a, *erit* $\frac{bc}{a}=d$: *proinde* $a.b::c.\frac{bc}{a}$.

COROLL. II. *Hinc quoque certo ſcire poſſumus, an quatuor termini ſint proportionales, obſervando, an productum ex duobus extremis æquale ſit producto ex duobus mediis. Nam termini proportionales varie diſponi & permutari poſſunt ſecundum varios argumentandi modos, quos in toto fere lib.* 5. *Euclides docuit. Ut ſi ſupponatur* $a.b::c.d$, *erit* permutando $a.c::b.d$, *&* invertendo $c.a::d.b$, *&* componendo $c+a.a::d+b.b$, *& ſic ulterius. Nihilominus in omnibus his permutationibus hoc Theorema ſemper verum eſſe debet.*

Theor. 5. In proportione Geometrica continua trium terminorum factum primi & tertii termini æquatur quadrato secundi. Nam cum ex hypothesi $a . b :: b . c$, erit *per Theor.* 4. $ac = bb$.

COROL. I. *Datis primo & tertio termino*, a & c, *habetur medius proportionalis* $= \surd ac$. *Nam in tribus continue proportionalibus* a, b, c, *cum sit* $ac = bb$, *extracta secunda radice, erit* $\surd ac = b$. *Et generatim factum duarum quantitatum est medium proportionale inter quadrata illarum.*

COROLL. II. *Datis autem primo & secundo termino trium Geometrice proportionalium, habetur tertius, si fiat ex secundo quadratum & dividatur per primum. Nam sit tertius* $= f$, *erunt ex hypothesi* a, b, f *continue proportionales, sed per hoc* Theor. 5. $af = bb$, *proinde dividendo per* a, *erit* $f = \frac{bb}{a}$. *Hac ratione inveniri possunt infiniti termini Geometrice proportionales.*

COROLL. III. *Denique in proportione continua Geometrica quadratum primi termini est ad quadratum secundi, ut primus terminus est ad tertium. Quod evidens est ex proportione continua* $1, a, a^2$; *tum etiam* ex Propos. 20. l. 6. Euclidis.

Theor. 6. Si quatuor termini Geometrice proportionales sint, erunt quoque proportionales ad quancunque illi dignitatem eleventur. Sit $a . b :: c . d$, erit quoque $a^2 . b^2 :: c^2 . d^2$. Item $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$. Demum $a^n . b^n :: c^n . d^n$. Sequitur *ex Propos.* 13. *l.* 8. *Eucl.* vel etiam potest numeris illustrari.

Co-

COROLL. *Terminorum proportionalium radices sunt pariter proportionales. Nam si* $a^n . b^n :: c^n . d^n$. *erit quoque* $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{c} . \sqrt[n]{d}$.

SCHOL. I. *Progressio Arithmetica terminorum quoruncunque*, b, d, f, g, h *&c. exprimi solet per iteratam differentiæ additionem. Sit inter primum & secundum terminum* b *&* d *differentia* c, *erit progressio* $b . b + c . b + 2c . b + 3c . b + 4c$ *&c. Quod si progressio sit descendens, ita ut primus terminus* b *secundum superet excessu* c, *tunc exprimitur per iteratam differentiæ subtractionem, nempe* $b . b - c . b - 2c . b - 3c . b - 4c$ *&c.*

SCHOL. II. *Axiomata, reductionis regulæ & theoremata superius allata sunt fundamenta æquationum instituendarum; neque sine illis resolvi possunt, ut mox videbimus. Eadem minute citare non solent Analystæ, unde sæpe tyronibus obscuritas. Nos in gratiam eorum in duabus sequentibus propositionibus id faciemus, quod deinde magna ex parte omittetur; siquidem memoriæ hæreant, cum eorum usus in Analysi perpetuus sit.*

PROPOSITIO IV.

Quæstionem datam ad æquationem redigere.

DEsignentur quantitates incognitæ per ultimas Alphabeti literas *x*, *z*, *y*, ut distinguantur a cognitis & datis, quæ literis prioribus *a*, *b*, *c*, *d* exprimi solent, ut diximus *Defin.* 3. ad *Cap.* 1 (quanquam & ipsæ priores literæ *a*, *b*, *c* &c. aliquando pro incognitis & indetermina-

tis usurpentur, ut inferius in *Probl.* 6. factum videbitur.) Expendantur deinde singulæ quæstionis conditiones & relationes, quæ dantur inter cognitas & incognitas, seu quæsitas quantitates; & ex utrisque simul tot formentur æquationes, quot sunt incognitæ assumptæ. Sed hæc usu magis, quam verbis addiscuntur. Ecce tibi plura exempla.

1. Invenire duos numeros, quorum summa est 100 & differentia 30.

Numerus major quæsitus sit $=x$, minor $=y$, summa $=100$, differentia $=30$. Ex conditione problematis oriuntur duæ æquationes, nempe

$$x+y=100,\ \&\ x-y=30$$

Vel in terminis generalibus: numerorum quæsitorum summa sit $=a$, differentia $=b$, erunt duæ æquationes

$$x+y=a,\ \&\ x-y=b$$

2. Invenire duos numeros tales, ut triplum primi superet secundum excessu $=a$, secundus vero superet primum excessu $=b$.

Sit primus quæsitorum $=x$, alter $=y$, oriuntur duæ æquationes

$$3x=y+a,\ \&\ y=x+b$$

3. Invenire duos numeros, qui sint in ratione 1 ad 5, sed si minori addas 2 & majori 3, sint in ratione 1 ad 2. Pone minorem $=x$, & majorem $=y$, erunt duæ æquationes,

I. $x.y::1.5$	II. $x+2.y+3::1.2$
Theor. 4. $y=5x$	*Theor.* 4. $2x+4=y+3$

Pona-

Ponatur in secunda loco y, ejus valor ex æquatione prima inventus, hoc est $5x$, erit

Ax. 4.	$2x + 4 = 5x + 3$
Sch. Prop. 1.	$4 - 3 = 5x - 2x$
Reg. 3.	$1 = 3x$
	$\frac{1}{3} = x$, & $y\ (= 5x) = \frac{5}{3}$

Adde ad $\frac{1}{3}$ numerum 2, & ad $\frac{5}{3}$ numerum 3, erit $x = \frac{7}{3}$ & $y = \frac{14}{3}$, & problema omnino resolutum.

4. Numerum invenire, a quo si auferatur f, deinde g, numeri residui sint in proportione m ad n.

Sit numerus quæsitus $= x$, erit per conditionem problematis

	$x - f \cdot x - g :: m \cdot n.$
Theor. 4.	$mx - mg = nx - nf$
Sch. Prop. 1.	$mx - nx = mg - nf$
Reg. 3.	$x = \dfrac{mg - nf}{m - n}$

Sit $f = 15$, $g = 20$, $m = 6$, $n = 1$, erit $x = \frac{105}{5} = 21$. Ex quo si auferas 15 & 20, habebis $6 \cdot 1 :: 6 \cdot 1$.

Vel sit $f = 3$, $g = 5$, $m = 2$, $n = 1$, erit $x = \frac{7}{1} = 7$. ex quo si auferas 3 & 5, habebis $4 \cdot 2 :: 2 \cdot 1$.

5. Invenire quadratum, cui si addatur 6, fiat sui lateris quintuplum.

Sit latus quadrati quæsiti x, erit per conditionem problematis $xx + 6 = 5x$, & $xx - 5x = -6$ *per Sch. cit.*

6. Invenire cubum, cui si ter addatur ejus radix & ter auferatur quadratum radicis ejusdem, æqualis sit unitati.

Sit

Sit latus cubi quæsiti x, erit per conditionem problematis

$$x^3 - 3x^2 + 3x = 1.$$

Schol. I. *Quo pauciores adhibentur incognitæ, eo facilius & expeditius problema solvitur. Ut si quærantur duæ quantitates, quarum una sit tripla alterius; si una denominetur* x, *præstat alteram denominare* 3x, *quam aliam incognitam* y *inducere. Similiter si invenire oporteat tres continue proportionales* x, z, y, *præstat duas tantum incognitas assumere, cum pro tertia sumi possit* $\frac{zz}{x}$ per Coroll. 2. Theor. 5.

Schol. II. *Ceterum curent tyrones æquationes recte instituere. Nam ex earum efformatione facilis, aut difficilis fieri solet quæstionum propositarum solutio: proinde nos multa exempla congessimus, plura quoque mox allaturi.*

PROBL. I.

Interrogatus Socrates, quænam esset hora, respondit: horæ e media nocte elapsæ ad horas usque ad meridiem residuas, se habent ut 2 ad 3: quæritur quænam esset hora.

Sint horæ elapsæ $= x$, erunt residuæ usque ad meridiem $= 12 - x$. Habetur ergo æquatio

$$x \,.\, 12 - x :: 2 \,.\, 3.$$

Theor. 4.	$3x = 24 - 2x$
Reg. 1.	$5x = 24$
Reg. 3.	$x = \frac{24}{5}$

Erant

Erant ergo horæ $4\frac{4}{5}$, hoc eſt hora quarta matutina cum min. 48.

Vel in terminis generalibus: ſint horæ elapſæ a media nocte $= x$, horæ autem a media nocte ad meridiem $= a$, erit reſiduum ad meridiem uſque $= a - x$; proportio vero horarum præteritarum ad reſiduas ſit ut n ad m, erit æquatio

$$x \,.\, a - x :: n \,.\, m.$$

Theor. 4. $\quad mx = na - nx$

Sch. Prop. 1. $\quad mx + nx = na$

Reg. 3. $\quad x = \frac{na}{m + n}$

Sit $n = 2$, $m = 3$ & $a = 12$, erit $x = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5} =$ hor. 4 min. 48.

Vel ſit $n = 5$, $m = 1$, $a = 12$, erit $x = \frac{60}{6} = 10$. Fuit ergo hora decima matutina.

PROBL. II.

Canis leporem inſequitur, eorumque diſtantia eſt paſſuum 100; *velocitas autem canis ad velocitatem leporis eſt ut* 3 *ad* 2: *quæritur ad quot paſſus canis leporem aſſequetur.*

DUm canis percurrit ſpatium 100, quod voco a, lepus interea ſpatium aliquod tranſcurrit $= x$, erit ergo ſpatium a cane percurrendum $= a + x$, proinde habetur æquatio

$$a + x \,.\, x :: 3 \,.\, 2$$

Vel

Vel in terminis generalibus:

$$a + x \,.\, x :: m \,.\, n$$

Theor. 4. $mx = an + nx$

Sch. Prop. 1. $mx - nx = an$

Reg. 3. $x = \frac{an}{m - n}$

Posito igitur $a = 100$, $m = 3$, $n = 2$, erit $x = 200$, & $a + x = 300$. Assequetur ergo post passus 300.

SCHOL. *Hoc idem problema proponit* Fr. Lucas Pacciolus ([a]) *e Burgo Sancti Sepulcri, sed confuse & per ambages, quod illi* Nic. Tartalea ([b]), & Hieron. Cardanus ([c]) *duriter exprobrant*.

PROBL. III.

Lucilius in alenda familia quotannis impendit tritici modios 60, reliquos seminat. Contigit, ut singulis tribus annis sextuplum ex messe collegerit, unde factus decuplo ditior in re frumentaria, quam antea fuerat: quaeritur, quot tritici modios primo haberet.

Pone primo habuisse modios $= x$, modios autem 60 pro annuo familiae alimento esse $= a$, messem ex semine quotannis sextuplam $= m$; erunt modii, detractis familiae alimentis, $= x - a$, qui si multiplicentur per m, dant primi anni messem $= mx - am$.

Secun-

(a) Summa de Arithm. & Geomet. proport. an. 1523. (b) Tom. 2. lib. I. cap. 15. quaest. 21. (c) Lib. unic. de quaest. Arithm. cap. 66.

Secundo anno detrahe rursus a pro alimentis familiæ, erit residuum $mx - am - a$, & multiplicando per m, habetur secundi anni messis $= m^2x - am^2 - am$.

Tertio anno, detractis similiter alimentis $= a$, erit residuum $m^2x - am^2 - am - a$, & multiplicando per m, obtinetur fructus tertii anni $= m^3x - am^3 - am^2 - am$.

Hæc autem quantitas ex conditione problematis debet esse decupla modiorum, quos primo habuit, proinde erit æquatio

$$m^3x - am^3 - am^2 - am = 10x$$

Schol. Prop. 1. $m^3x - 10x = am^3 + am^2 + am$

Reg. 3. $x = \frac{am^3 + am^2 + am}{m^3 - 10}$

Substituantur jam pro literis, earumque potestatibus determinati earum valores, innotescet valor ipsius x. Nam posito $a = 60$ & $m = 6$, erit $m^3 = 216$, $m^2 = 36$, $am^3 = 12960$, $am^2 = 2160$, $am = 360$; hinc $\frac{am^3 + am^2 + am}{m^3 - 10}$ $\frac{15480}{206} = 75\frac{15}{103} = x$. Habuit ergo primo modios 75 $+ \frac{15}{103}$ unius modii.

Q PROBL.

PROBL. IV.

Metellus duos filios testamento reliquit hæredes hac ratione, ut major natu accipiat aureos 100 *& quartam partem ejus, quod restat de tota hæreditate: minor vero accipiat aureos* 50 *& dimidium ejus, quod remansit de hæreditate, detractis prius & portione sui fratris & aureis illis* 50. *Divisione facta, apparuit, utrunque filium esse ex æquo hæredem: quæritur quanta fuerit hæreditas, & quæ filiorum portio.*

Pone hæreditatem fuisse $= x$, aureos $100 = a$; erit residuum totius hæreditatis $x - a$ & ejus quarta pars $\frac{x-a}{4}$. Majoris igitur portio $= a + \frac{x-a}{4}$.

Pone secundo aureos $50 = b$, erit filii minoris portio $= b + \frac{x - a - b - \frac{x+a}{4}}{2}$. Sed portiones inventæ fuerunt æquales, hinc

$$a + \frac{x-a}{4} = b + \frac{x - a - b - \frac{x+a}{4}}{2}$$

Et multiplicando primo per 2, deinde per 4, erit

$$2a + \frac{2x - 2a}{4} = 2b + x - a - b - \frac{x + a}{4}$$

$$8a + 2x - 2a = 8b + 4x - 4a - 4b - x + a$$

Lem. Cap. 1. $6a + 2x = 4b + 3x - 3a$

Reg. 1. $x = 9a - 4b$

Cum sit $a = 100$, $b = 50$, erit hæreditas x ($= 9a - 4b$) $= 700$, & valore ($9a - 4b$) in superiori æquatione posito, innotescit utriusque filii portio $= 250$.

Idem problema proponi poterat paulo universalius, quod ad tyronum exercitationem facimus.

Metellus filios suos reliquit hæredes hac lege, ut primus omnium A *accipiat aureos* a, *& de reliqua hæreditate partem* n. *Secundus filius* B *accipiat aureos* 2a *& partem itidem* n *de reliqua hæreditate. Filius* C *habeat aureos* 3a, *& de eo, quod remanet, partem similiter* n, *& sic de aliis. Facta inter filios divisione, repertum est singulos esse æqualiter hæredes: quæritur quanta fuerit hæreditas, qui filiorum numerus, eorumque portio.*

Sit hæreditas $= x$, & accipiat A de illa portionem $= a$, residuum erit $x - a$, cujus pars $\frac{x - a}{n}$ ad ipsum A spectans. Erit ergo filii A portio $= a + \frac{x - a}{n}$.

Filii vero B portio $= 2a + \frac{x - 3a - \frac{x+a}{n}}{n}$, quæ portiones ex hypothesi sunt æquales, proinde

$$a + \frac{x-a}{n} = 2a + \frac{x - 3a - \frac{x+a}{n}}{n}$$

hoc est multiplicando per n, erit

$$an + x - a = 2an + x - 3a - \frac{x+a}{n}$$

& rursus multiplicando per n totam æquationem, & auferendo terminos, qui superfluunt, habetur, ordinata æquatione, valor ipsius $x = an^2 - 2an + a$, valor scilicet totius hæreditatis. Quo valore in prima æquatione $a + \frac{x-a}{n}$ substituto, invenitur portio filii $A = a + \frac{na^2 - 2na}{n} = na - a$, per quam (cum portiones sint æquales) si dividatur tota hæreditas jam inventa $n^2a - 2na + a$, quotus $n - 1$ dat numerum filiorum.

Sit $a = 100$, & $n = 6$, erit $an - a = 600 - 100 = 500$ portio singulorum. At vero $n - 1 = 6 - 1 = 5$ filiorum numerus, adeoque 5×500 dat integram hæreditatem 2500.

Coroll. *Pro generali problematis solutione habetur triplex Canon.* 1.° *Denominator fractionis unitate multatus* (n − 1) *dat numerum filiorum.* 2.° *Denominator fractionis unitate multatus in quantitatem datam ductus* n − 1 × a

$\overline{1} \times a$ *dat filiorum portionem*. 3.° *Denominatoris unitate multati quadratum in quantitatem datam ductum* $\overline{n-1} \times \overline{n-1} \times a$ *dat integram hæreditatem*.

PROBL. V.

Tres mercatores, inita societate, lucrati sunt summam quandam aureorum. Hoc unum constat, primum cum secundo accepisse summam aureorum a, *& eundem primum cum tertio aureos* b, *secundum vero cum tertio aureos* c: *quæritur, quantum fuerit lucrum singulorum*.

Sint tres socii x, z, y, summæ vero a, b, c; erit per conditionem Probl.

$$\begin{array}{c|c} x+z=a & z=a-x \\ x+y=b & y=b-x \\ z+y=c & \end{array}$$

Fiat reductio, ut in *Prop.* 2. docuimus, & quantitatis x valor $\left(\frac{a+b-c}{2}\right)$ ponatur in duabus æquationibus $z=a-x$, & $y=b-x$, innotescet lucrum singulorum, nempe

$$x=\frac{a+b-c}{2},\ z=\frac{a-b+c}{2},\ y=\frac{b-a+c}{2}$$

Sit $a=100$, $b=120$, $c=160$, erit $x=30$, $z=70$, $y=90$. Co-

COROLL. *Patet singulas alternas summas excedere debere summam quanlibet tertiam, alias valor prodiret negativus. Sic in prima æquatione* $a+b>c$, *in secunda* $a+c>b$ *&c.*

Idem problema aliter. Sint tres æquationes, ut prius,

$$x+z=a,\ x+y=b,\ z+y=c$$

Addantur simul *per Prop. 2. hujus*, erit nova æquatio

$$2x+2z+2y=a+b+c$$

Divid. per 2. $$x+z+y=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}c$$

Ex hac æquatione subtrahe *per Prop. cit.* tres æquationes priores sigillatim, innotescet valor x, z, y.

$$x+z+y=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}c$$
Subtr. $$z+y=c$$
$$x=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b-\tfrac{1}{2}c$$

$$x+z+y=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}c$$
Subtr. $$x+y=b$$
$$z=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}c-\tfrac{1}{2}b$$

$$x+z+y=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}c$$
Subtr. $$x+z=a$$
$$y=\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}c-\tfrac{1}{2}a$$

Posito, ut supra, $a=100$, $b=120$, $c=160$, iterum prodit $x=30$, $z=70$, $y=90$.

PRO-

PROBL. VI.

Lucius ad ædificandam domum lapides, calcem & sabulum comparaverat. Mutato deinde consilio, ea omnia tribus emptoribus A, B & C *vendidit, nempe*

A emit	2. currus lapidum)		
	3. currus calcis)	*Juliis* 34	
	7. currus sabuli)		
B emit	3. currus lapidum)		
	4. currus calcis)	*Juliis* 46	
	12. currus sabuli)		
C emit	4. currus lapidum)		
	1. currum calcis)	*Juliis* 42	
	13. currus sabuli)		

Quæritur singularum ejusmodi rerum pretium.

Pone pretium lapidum pro singulis curribus $= a$, pro singulis curribus calcis $= b$, & pro curribus sabuli $= c$; erunt ergo 2 currus lapidum $= 2a$: currus 3 calcis $= 3b$ & 7 currus sabuli $= 7c$, (quantitates a, b, c hic sumuntur pro incognitis & indeterminatis, ut monuimus in *Propos.* 4. *hujus*) habentur ergo æquationes

$$A \quad 2a + 3b + 7c = 34$$
$$B \quad 3a + 4b + 12c = 46$$
$$C \quad 4a + 1b + 13c = 42$$

Ex pri-

Ex prima æquatione *A* habetur *per Schol. Prop.* 1.

$$2a = -3b - 7c + 34$$

Reg. 3. $$a = -\tfrac{3}{2}b - \tfrac{7}{2}c + 17$$

Hoc valore in ſecunda æquatione *B* poſito *per Ax.* 4. *hujus* erit

$$-\tfrac{9}{2}b - \tfrac{21}{2}c + 51 + 4b + 12c = 46$$

Lem. Cap. 1. $$-\tfrac{1}{2}b + \tfrac{3}{2}c + 51 = 46$$

Subtr. $$51 \quad 51$$

$$-\tfrac{1}{2}b + \tfrac{3}{2}c = -5$$

Reg. 1. $$-\tfrac{1}{2}b = -\tfrac{3}{2}c - 5$$

Reg. 2. $$-b = -3c - 10$$

Reg. 1. $$b = 3c + 10$$

Adde $$+\tfrac{1}{2}b = \tfrac{3}{2}c + 5$$

$$\tfrac{3}{2}b = \tfrac{9}{2}c + 15$$

Sed inventa fuit $a = -\tfrac{3}{2}b - \tfrac{7}{2}c + 17$, proinde ſi in hac æquatione pro $-\tfrac{3}{2}b$ ponatur ejus valor $(\tfrac{9}{2}c + 15)$, erit *per* 4. *Ax. hujus*

$$a = -\tfrac{9}{2}c - 15 - \tfrac{7}{2}c + 17$$

Lem. cit. $$a = -8c + 2$$

Subſtituantur jam in tertia æquatione *C* valores inventi *a* & *b*, obtinebitur æquatio

$$-32c + 8 + 3c + 10 + 13c = 42$$

Lem. cit. $$-16c = 24$$

Reg. 3. $$c = -\tfrac{24}{16} = -\tfrac{3}{2}$$

Sunt autem $a = -8c + 2$, & $b = 3c + 10$. Subſtituto igitur valore ejuſdem c, determinantur a & b, ſcilicet

$$a = 12 + 2 = 14$$

$$b = -\tfrac{9}{2} + 10 = 5\tfrac{1}{2}$$

Proin-

Proinde lapides pro singulis curribus venduntur juliis 14. calcis currus quilibet juliis $5\frac{1}{2}$. Currus autem sabuli ob valorem negativum ($c = -1\frac{1}{2}$) nihil venditur; imo ipse sabuli dominus solvit julium $1\frac{1}{2}$ emptoribus illis pro unoquoque sabuli curru e domo amovendo.

SCHOL. I. *Hoc probl. a* Hieronymo Cardano (a) *paucis verbis propositum, visum est nobis non inelegans & tyronibus in calculo exercendis opportunum.*

SCHOL. II. *Poterant hæc problemata abstracte, & in terminis generalibus proponi, ut plerique faciunt. Sed quia specialia & particularibus circumstantiis deducta phantasiam magis juvant, & juvenes cum statim ab initio artis, alioquin difficilis, usum aliquem specialem agnoscunt, ad ulteriora alacriores fiunt, ea sic afferre satius duximus.*

SCHOL. III. *Si ex problematis propositi conditionibus haberi non possint tot æquationes, quot incognitæ fuerunt assumptæ, problema dicitur* indeterminatum, *quia non unam, sed plures obtinere potest solutiones, & tunc una ex incognitis ad arbitrium sumitur. Ut si quærantur duo numeri, quorum factum æquale sit numero dato, v.g.* 12. *Sint illi* x *&* y, *per conditionem problematis una tantum haberi potest æquatio, nempe* $xy = 12$; *unde* $y = \frac{12}{x}$. *Sumatur ad arbitrium* $x = 2$, *erit* $y = \frac{12}{2} = 6$. *Si sumatur* $x = 3$, *erit* $y = \frac{12}{3} = 4$. *Si* $x = 4$, *erit* $y = 3$ *&c. Hujus generis sunt problemata, quæ sequuntur.*

R Pro-

(a) Lib. unic. de quæst. Arithm. cap. 66.

Problemata Indeterminata.

PROBL. I.

Duos numeros invenire, quorum summa sit ad eorum differentiam in quacunque data ratione.

SIt quæsitorum unus $= x$, alter $= y$, & ratio data sit a ad b, erit per conditionem Probl.

$$x + y \cdot x - y :: a \cdot b$$

Theor. 4. $\quad ax - ay = bx + by$

Schol. Prop. 1. $\quad ax - bx = ay + by$

Divid. per $a - b$ $\quad x = \dfrac{ay + by}{a - b}$

Sit $a = 3$, $b = 1$, & sumatur ad arbitrium $y = 2$, erit $x = \dfrac{6 + 2}{2} = 4$, proinde $4 + 2 \cdot 4 - 2 :: 3 \cdot 1$.

Sit $a = 4$, $b = 3$, & sumatur, si libet $y = 5$, erit $x = \dfrac{20 + 15}{1} = 35$. Hinc $35 + 5 \cdot 35 - 5 :: 4 \cdot 3$.

PROBL. II.

Duos numeros invenire, quorum summa sit ad summam quadratorum, quæ ex ipsis fiunt, in ratione data.

SIt unus numerus quæsitus $= x$, alter $= xy$, & ratio data sit a ad b, erit ex conditione problematis

$x +$

$$x + xy \cdot xx + xxyy :: a \cdot b$$

Theor. 4. $bx + bxy = axx + axxyy$

Reg. 3. $b + by = ax + axyy$

Reg. 3. $x = \frac{b + by}{a + ayy}$

Sit $a = 3$, $b = 1$, & sumatur ad libitum $y = 2$, erit $x = \frac{1+2}{3+12} = \frac{1}{5}$, proinde $x + xy = \frac{3}{5}$, & $xx + xxyy = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$, ideoque $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} :: 3 \cdot 1$.

Sit $a = 2$, $b = 1$, & sumatur $y = 3$, erit $x = \frac{1+3}{2+18} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$, $x + xy = \frac{4}{5}$, & $xx + xxyy = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$, proinde habetur $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} :: 2 \cdot 1$.

SCHOL. I. *Eodem modo resolvitur problema, si quærantur duo numeri, quorum summa sit ad differentiam quadratorum ex ipsis in quacunque ratione data* a *ad* b. *Vel duo numeri, quorum differentia sit ad differentiam quadratorum, quæ ex ipsis fiunt, in ratione data* a *ad* b. *Vel duo numeri, quorum differentia sit ad summam quadratorum ex ipsis, ut* a *ad* b. *Quos omnes casus* Diophantus Alexandrinus [a] *accurate resolvit.*

SCHOL. II. *Nota pro altero numero quæsitorum non sumi simpliciter* x, *vel* y, *sed* xy, *ut scilicet tota æquatio multiplicata per* x *existat, & inde haberi possit divi-*

(a) Arithmetic. lib. 1. & 2. cum Bacheto, & de Fermat.

sor communis, ut facta divisione, quadrata illa ad quantitatem unius dimensionis reducantur; quod quidem pro similibus casibus est advertendum.

PROBL. III.

Datum numerum quadratum in alia duo quadrata dividere.

Sit latus dati quadrati $= a$, latus quæsiti $= x$, & alterius quæsiti $= y$, erit $a^2 = x^2 + y^2$. Quia vero latus a majus est alterutro latere x, vel y seorsim accepto, fieri poterit $a - x = y$, vel sumpto ad libitum v, fieri poterit $a - vx = y$, vel etiam $vx - a = y$; tunc enim superior æquatio $a^2 = x^2 + y^2$ in sequentem transformabitur, substituto, loco y^2, ejus valore.

$$a^2 = x^2 + v^2x^2 - 2avx + a^2$$
$$v^2x + x = 2av$$

Divid. per $v^2 + 1$ $\qquad x = \dfrac{2av}{v^2 + 1}$

Hoc valore ipsius x posito in æquatione $vx - a = y$, habetur $y = \dfrac{avv - a}{v^2 + 1}$.

Sit $a = 10$, assumpto ad libitum $v = 3$, erit $x = \frac{60}{10} = 6$, & $y = \frac{80}{10} = 8$. Fiant quadrata, erit $100 = 36 + 64$.

Sit $a = 12$, & ad libitum $v = 2$, erit $x = \frac{48}{5}$, & $y = \frac{36}{5}$. Fiant quadrata, reducendo 12 ad fractionem ejusdem nominis, hoc est ad $\frac{60}{5}$, erit (deleto communi denominatore 25) $3600 = 2304 + 1296$.

PROBL.

PROBL. IV.

Datum numerum in duos secare, quorum factum sit quadratum.

Sit numerus datus $= 2a$, partium vero, in quas dividi debet, differentia sit $= 2y$, erit *per Theor.* 3. pars major $a + y$, minor autem $a - y$, earumque factum $aa - yy$, quod ex conditione problematis debet esse quadratum. Pro cujus latere, sumpto v ad libitum, fiat $a = vy$, seu $vy - a$, erit

$$aa - yy = v^2y^2 - 2avy + a^2.$$

Factaque reductione *per Lem. Cap.* 1. habetur

$$v^2y^2 + y^2 = 2avy$$

Divid. per y $\quad v^2y + y = 2av$

Tum per $v^2 + 1 \quad y = \frac{2av}{v^2 + 1}$

Sit $2a = 20$, sumatur ad arbitrium $v = 3$, erit $y = \frac{60}{10} = 6$, proinde $a + y = 16$, & $a - y = 4$, unde $aa - yy = 100 - 36 = 64 = 4 \times 16$.

Sit $2a = 30$, sumpto $v = 2$, erit $y = \frac{60}{5} = 12$, proinde $a + y = 27$, $a - y = 3$, & $aa - yy = 81$.

SCHOL. *Quantitas* u *est quidem arbitraria, sed talis sumi debet, ut* y *semper maneat minor quam* a, *cujus differentia esse supponitur.*

PROBL.

PROBL. V.

Quadratum invenire, quod sive addito, sive dempto quocunque suæ radicis multiplici, submultiplici, superparticulari, & quavis alia proportionis specie, semper sit quadratum.

Sit quæsiti quadrati latus $= x$, & radicis addendæ, aut detrahendæ multiplum $= m$, erit $x^2 + mx$ quadratum una cum multiplo suæ radicis, cui quadratum æquale quæritur. Pro cujus latere, sumpto ad libitum v, fiat $v - x$, erit ex conditione Probl.

$$x^2 + mx = vv - 2vx + xx$$

Sch. Prop. 1. $$2vx + mx = vv$$

Reg. 3, $$x = \frac{vv}{2v + m}.$$

Sit $m = 2$, & sumatur ad libitum $v = 5$, erit $x = \frac{25}{12}$, hinc $x^2 + mx = \frac{625}{144} + \frac{50}{12} = \frac{1225}{144}$, cujus $\surd = \frac{35}{12}$.

Sit $m = 3$, & ad libitum $v = 4$, erit $x = \frac{16}{11}$, & $x^2 + mx = \frac{256}{121} + \frac{48}{11} = \frac{784}{121}$, cujus $\surd = \frac{28}{11}$.

Quod si data radicis proportio non addi, sed subtrahi debeat a suo quadrato, tunc invenietur $x = \frac{v^2}{2v - m}$, ut calculum ineunti palam est.

Sit enim, ut supra, $m = 3$, $v = 4$, erit $x = \frac{16}{5}$, & $x^2 - mx = \frac{256}{25} - \frac{240}{25} = \frac{16}{25}$, cujus $\surd = \frac{4}{5}$.

Sit demum $m = 4$, $v = 5$, erit $x = \frac{25}{6}$ & $x^2 - mx = \frac{625}{36} - \frac{100}{6} = \frac{25}{36}$, cujus $\surd = \frac{5}{6}$.

SCHOL.

SCHOL. *In hoc problema satis elegans casu incidit, ut ipse asserit*, P. Augustinus Thomas a S. Josepho ([a]) *Schol. Piarum Geometra & Astronomus in Germania clarissimus. Pro quo, suppressa analysi, canonem tradidit universalem* $\frac{a^4 + 2a^2m^2}{4a^3 - 4am^2} + m^4 =$ *radici quadrati quaesiti*; *ubi* m *denotat proportionem cujuscunque speciei*; a *sumitur ad libitum, modo major sit quam* m. *At canon a nobis traditus longe simplicior est, ut patet.*

PROBL. VI.

Tres numeros invenire, quorum tum summa, tum bini quadratum efficiant.

SInt numeri quaesiti x, y, z; primi autem quadrati $x + y + z$ latus sit r, secundi quadrati $x + y$ latus sit s, tertii $x + z$ sit t; & quarti $y + z$ sit v, erunt quatuor aequationes

1.^{a} $x + y + z = rr$

2.^{a} $x + y = ss$

3.^{a} $x + z = tt$

4.^{a} $y + z = vv$

Ex prima & secunda aequatione habentur duo valores ipsius x, *per Corol.* 1. *Prop.* 1. nempe

$$x = rr - y - z, \ \& \ x = ss - y$$

$$rr - y - z = ss - y$$

Axiom. 2. $\quad rr - z = ss$

Coroll. cit. $\quad z = rr - ss$

Ex

([a]) Sylloge Epist. Mathem. Pragae an. 1713.

Ex tertia æquatione habetur $x = tt - z$ *per Coroll. cit.*, positoque loco z ejus valore modo invento, habetur *per Axiom.* 4.

$$x = tt - rr + ss$$

Cumque habeatur ex secunda æquatione $x = ss - y$, duæ æquationes æquales erunt, scilicet

$$tt - rr + ss = ss - y$$

Ax. 2 $\quad tt - rr = -y$

Ax. 1. *& Cor.* 2. *Prop.* 1. $\quad y = rr - tt$

Positis autem in quarta æquatione $y + z = vv$, valoribus y & z jam inventis, erit *per Ax.* 4.

$$rr - tt + rr - ss = vv$$

$$2rr - tt - ss = vv$$

Fiat $r - m = t$, erit $rr - 2rm + m^2 = tt$. Item fiat $r - n = s$, erit $rr - 2rn + n^2 = ss$; & his valoribus in superiori æquatione substitutis loco $-tt - ss$, oritur æquatio

$$2rr - rr + 2rm - m^2 - rr + 2rn - n^2 = vv$$

Lem. Cap. 1. $\quad 2rm + 2rn - m^2 - n^2 = vv$

Ax. 1. $\quad 2rm + 2rn = vv + m^2 + n^2$

Reg. 3. $\quad r = \dfrac{vv + m^2 + n^2}{2m + 2n}$

m, n, v sunt ad libitum.

Sit $m = 1$, $n = 2$, $v = 7$, erit $r = \frac{54}{6} = 9$; hinc $r - m = t = 9 - 1 = 8$, & $r - n = s = 9 - 2 = 7$.

Proinde

	$x = 32$	$x + y + z = 81$
	$y = 17$	$x + y = 49$
	$z = 32$	$x + z = 64$
		$y + z = 49$

Sit,

Sit $m=2$, $n=4$, $v=8$, erit $r=\frac{84}{12}=7$, & $r-m=t=5$, $r-n=s=3$; adeoque

$x=-15$	$x+y+z=49$
$y=24$	$x+y=9$
$z=40$	$x+z=25$
	$y+z=64$

SCHOL. *Problemata indeterminata qui plura cupit, Diophantum adeat, qui in numeris infinita fere proponit, unde* Analysis Diophantea *nomen accepit. Horum solutionem recentiores alia via per analysim speciosam indagarunt*, Billy ([a]) *præsertim*, Ozanam ([b]), *&* Præstetus ([c]). *Hæc quidem determinatis difficiliora tyroni evadunt. Negligenda tamen non sunt, cum in doctrina curvarum usum habeant plurimum, ut nos opportune* Wolfius ([d]) *admonet. Quæ nos hic pauca selegimus ad ceterorum intelligentiam, siquidem probe percepta fuerint, satis erunt.*

CAPUT VI.

De Æquationibus compositis.

HActenus de æquationibus *simplicibus*. Nunc ad *compositas*, quæ pluribus constant dimensionum gradibus, transitum facimus. Quarum naturam, & proprietates præcipuas hoc loco breviter explicabimus.

S PRO-

([a]) Diophant. redivivus. ([b]) Nouveaux elem. d'Algeb. l. 3. ([c]) Nouveaux elemens des Mathematiq. T. 2. ([d]) Elem. analy. edit. 2. Cap. 2. §. 249.

PROPOSITIO I.

Explicatur æquationum compositarum genesis.

Assumantur nonnullæ æquationes simplices, quæ radices positivas, vel negativas contineant, & æquentur nihilo. Deinde ad invicem multiplicentur, orientur æquationes compositæ tot graduum, quot assumptæ fuerint radices.

Sit $x = a$, seu $x - a = 0$
$x = b$ $\quad x - b = 0$

Multiplicentur inter se hæ duæ æquationes simplices, oritur

$$\begin{aligned} x^2 - ax + ab &= 0 \\ - bx \quad & \end{aligned}$$

Sit deinde $x = c$, seu $x - c = 0$, & per hanc multiplicetur æquatio jam inventa, erit æquatio composita tertii gradus

$$\begin{aligned} x^3 - ax^2 + abx \quad & \\ - bx^2 + acx - abc &= 0 \\ - cx^2 + bcx \quad & \end{aligned}$$

Eadem ratione sit $x = 2$, seu $x - 2 = 0$
$x = -3$, seu $x + 3 = 0$
$x = 4$, seu $x - 4 = 0$

Multiplicentur ad invicem hæ tres æquationes simplices, fit æquatio tertii gradus

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$$

Quæ

Quæ quidem si ulterius multiplicetur per aliam æquationem simplicem $x+1=0$, fit æquatio quarti gradus, nempe

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0$$

Atque hic nonnulla circa æquationes hujusmodi diligenter observanda sunt:

I. In qualibet æquatione tot dari radices, quot incognita primi termini dimensiones habet, seu quot habet exponens unitates; nempe duas in quadratica, tres in cubica &c.

II. Quantitatem cognitam secundi termini continere summam omnium radicum sub signo contrario, hoc est radices positivas cum signo $-$, negativas cum signo $+$. Quantitatem cognitam tertii termini exhibere productum ex singulis binis radicibus sub signo proprio: cognitam quarti productum ex singulis ternis radicibus sub signo contrario, & sic deinceps. Terminum vero ultimum (quem homogeneum comparationis vocant) esse factum omnium radicum. Hæc omnia in prima & secunda æquatione oculis patent.

III. In omni æquatione tot dari radices positivas, seu veras, quot sunt mutationes signorum de $+$ in $-$, & de $-$ in $+$; tot vero negativas, seu falsas, quot successiones signorum eorundem $++$, vel $--$. Sic in æquatione $x^2 - 5x + 6 = 0$, quia duplex est mutatio signorum $+-$, & $-+$, duplex est radix positiva, nempe $x=2$, & $x=3$. In æquatione vero $x^2 + 3x - 4 = 0$, quia una est signorum eorundem successio $++$, & una mutatio $+-$, una radix est negativa, nempe $x=-4$, & altera positiva

tiva $x = 1$. Si vero omnia signa sint positiva, ut in æquatione $x^2 + 5x + 6 = 0$, radices omnes falsæ sunt, nempe $x = -2$, & $x = -3$.

IV. Si radices veræ sint falsis æquales, secundus terminus æquationis evanescit, & fit æqualis zero. Sit $x = 2$, $x = 3$, & $x = -5$. Fiat æquatio, ut supra docuimus, oritur $x^3 * - 19x + 30 = 0$, in qua secundus terminus deficit. Si radices veræ superant falsas, secundus terminus æquationis est cum signo $-$. Sit radix vera $x = 5$ major quam falsa $x = -2$, erit æquatio $x^2 - 3x - 10 = 0$, in qua -3 denotat excessum radicis veræ $+5$ supra falsam -2. Si denique radices falsæ majores sunt quam veræ, secundus terminus æquationis est cum signo $+$. Sit radix falsa $x = -5$, vera autem sit $x = 2$, erit æquatio $x^2 + 3x - 10 = 0$, in qua $+3$ exprimit excessum radicis falsæ -5 supra veram $+2$.

V. Duplici ratione cognoscitur, quantitatem aliquam positivam, aut negativam esse radicem æquationis. Primo si fiat binomium constans incognita, & quantitate aliqua data cum signo $-$, si sit quantitas positiva; vel cum signo $+$, si sit negativa, & per ipsum exacte, & sine ullo residuo æquatio sit divisibilis. Sic quia æquatio superior, $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ divisibilis est exacte per $x - 2$, seu per $x + 3$, vel per $x - 4$, deducitur $+2$, -3, $+4$ esse radices ejusdem æquationis: cum æquationes oriantur ex multiplicatione, & divisio sit multiplicationi contraria. Secundo si substituendo in æquatione, loco incognitæ, quantitatem datam cum signo $+$ si est positiva, aut cum signo $-$ si est negativa, & omnia producta per signa contraria sese destruant, erit illa quantitas radix æquationis. Sit eadem

æqua-

æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$. Subſtituatur loco incognitæ x, ubique ejus valor $+2$; erit $8 - 12 - 20 + 24 = 0$. Subſtituatur rurſus loco ejuſdem incognitæ x valor -3, erit $-27 - 27 + 30 + 24 = 0$. Demum ſubſtituto valore $+4$, erit $64 - 48 - 40 + 24 = 0$.

Similiter in æquatione $x^2 - ax - ab = 0$. Radices ſunt
$+bx$
$+a$, $-b$, ſubſtituantur hi valores loco incognitæ x, erit $a^2 - a^2 + ab - ab = 0$. Item $b^2 - b^2 + ab - ab = 0$.

SCHOL. I. *Præter radices rationales poſitivas, aut negativas, de quibus hactenus locuti ſumus, dantur etiam in æquationibus radices irrationales, & incommenſurabiles tam poſitivæ, quam negativæ. Sic æquatio* $x^2 - 6x + 4 = 0$ *habet duas radices irrationales* $3 + \sqrt{5}$, *&* $3 - \sqrt{5}$.

SCHOL. II. *Præter radices reales rationales, & irrationales jam allatas, æquatio aliquando continet radices imaginarias, & impoſſibiles. Nam cum nonnullæ quæſtiones caſus impoſſibiles involvant, ut ſi quæratur in circulo dato applicari rectam, quæ diametro circuli major ſit, neceſſe eſt radix illi caſui reſpondeat impoſſibilis. Sic æquatio* $x^2 - 2x + 7 = 0$ *continet duas radices imaginarias* $1 + \sqrt{-6}$ *&* $1 - \sqrt{-6}$, *quæ in æquationibus ſunt ſemper numero pares.*

SCHOL. III. *Regula, quam ex Carteſio docuimus ſupra* num. 3. *pro dignoſcendis ex permutatione, aut ſucceſſione ſignorum radicibus veris ac falſis, non valet pro æquationibus, quæ radicibus imaginariis conſtant. Nam ſuperior æquatio* $x^2 - 2x + 7 = 0$ *ex ſignorum permutatione continere videtur duas radices veras, quod tamen eſt falſum.*

Multi-

Multiplicetur enim per $x + 3 = 0$, *ut præter duas veras, aliam quoque falsam contineat*: *oritur* $x^3 + 1x^2 + 1x + 21 = 0$, *in qua dispositio signorum ex præcit. regula indicat, omnes radices esse falsas. Non erant ergo in æquatione duæ radices veræ, quales apparebant, sed imaginariæ* $1 + \sqrt{-6}$, *&* $1 - \sqrt{-6}$. *Proinde hic regula fallit.*

PROPOSITIO II.

Æquationem quancunque ordinare.

I. Ponantur in uno æquationis membro omnes incognitæ, ita ut primo loco statuatur incognita maximæ potestatis, quæ dicitur *primus* æquationis terminus: secundo loco incognita potestatis uno gradu inferioris, quæ dicitur *secundus* terminus æquationis, deinde omnes aliæ incognitæ gradatim decrescentes, quæ constituunt *tertium*, *quartum*, *quintum &c.* terminum æquationis. In altero æquationis membro ponantur omnes termini, qui ex cognitis quantitatibus componuntur.

Sit æquatio inventa $bx^2 + x^3 = bx - ab + cd$
erit *ordinata* $x^3 + bx^2 - bx = cd - ab$

Item sit æquatio $by^3 - dy + y^4 = abc + cy + mf$
erit *ordinata* $y^4 + by^3 - cy - dy = abc + mf$

II. Si terminus maximæ potestatis multiplicatus existat per aliam quantitatem, sive literariam, sive numericam, dividi debet per illam, ut simplex evadat. Sit $3x^2 + 6ax = ab$, dividendo per 3 totam æquationem, erit

x^2

$x^2 + 2ax = \frac{1}{2}ab$. Eadem ratione si sit æquatio $ax^2 - 2ax = abc$, dividendo per a, fit $x^2 - 2x = bc$.

III. Si terminus maximæ poteſtatis afficitur ſigno —, fieri debet per terminorum tranſpoſitionem poſitivus. Sic in æquatione $ax - x^2 = ab - cf$, facta terminorum tranſpoſitione, erit $x^2 - ax = cf - ab$.

IV. Omnes illi termini, in quibus incognita eandem habet dimenſionem, ſtatuantur unus infra alium; idemque fiat de quantitatibus cognitis, ſi plures ſint, ut

$$\begin{matrix} x^3 + ax^2 - bx \\ - bx^2 + cx \end{matrix} = abc$$

Quantitates $ax^2 - bx^2$ ſtant ambæ loco ſecundi termini, & $-bx + cx$ loco tertii termini. Similiter in æquatione

$$\begin{matrix} x^2 - ax = ac - bc + mf \\ - bx \end{matrix}$$

Quantitates $ac - bc + mf$ unicum terminum conſtituunt.

COROLL. I. *Hinc habetur modus revocandi quancunque æquationem compoſitam ad ſimplicem. Si enim in ſuperiori prima æquatione ponatur* $a - b = p$, *erit* $ax^2 - bx^2 = px^2$. *Item ponendo* $-b + c = q$, *erit* $-bx + cx = qx$, *demum ponendo* $abc = r$, *eadem æquatio transformabitur in hanc ſimpliciſſimam* $x^3 + px^2 + qx = r$. *Similiter in ſuperiori ſecunda æquatione fiat* $-a - b = -p$, *erit* $-ax - bx = -px$; *fiat* $ac - bc + mf = q$, *ea in hanc transformabitur* $x^2 - px = q$. *Quod quidem quanti ſit uſus, ex inferius dicendis ſatis conſtabit.*

COROLL. II. *Præſtat non raro omnes æquationis terminos ad unam partem transferre, ita ut omnes quantitates nihilo*

nihilo fiant æquales. Sic æquatio $x^2 - px = q$ *fiet* $x^2 - px - q = 0$. *Item* $x^3 - ax^2 + bx = a^2b^2$, *erit* $x^3 - ax^2 + bx - a^2b^2 = 0$. *Quod artificium Algebræ, ut videbimus, valde commodum*, Thomæ Harrioto ([a]) *Anglo tribuitur*.

COROLL. III. *Si quis terminus in æquatione desit, ut secundus, tertius, quartus &c. Notatur termini, aut terminorum (si plures desint) defectus asterismo, ut æquatio* $x^3 * + ax - a^3 = 0$, *quæ secundo termino caret. Pariter* $x^4 * - cx^2 * + a^2bc = 0$ *caret terminis secundo & quarto. Tunc autem minime variatur sequentium terminorum ordo, aut conditio. Sed* ax *v.g. in prima æquatione manet terminus æquationis tertius; & in secunda* $+ a^2bc$ *tenet locum æquationis quintum, licet absint duo termini, & sic de aliis.*

PROPOSITIO III.

Radices veras in falsas, & falsas in veras commutare.

MUtentur in æquatione signa terminorum parium, ea nempe, quæ præcedunt terminos secundum, quartum, sextum &c. radices veræ degenerabunt in falsas, & vicissim falsæ in veras. Sit æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$, quæ ex *anteced. Prop.* habet duas radices veras $+2$, $+4$, & unam falsam -3. Variatis autem terminorum parium signis, fit $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$, quæ quidem habet easdem cum priore radices, sed duas falsas -2, -4, & unam veram $+3$. *Demon-*

([a]) Artis Analyt. praxis Londini 1631.

Demonstratio: Substituatur in eadem æquatione loco incognitæ x una ex radicibus, seu valoribus -2, tota æquatio evanescit, nempe $-8+12+20-24=0$. Substituatur deinde -4, iterum æquatio evanescit, nam $-64+48+40-24=0$. Idem fiat cum radice vera $+3$; erit enim $27+27-30-24=0$, ergo -2, -4, $+3$, sunt radices illius æquationis *per Prop.* 1. *hujus num.* 5. Quod &c.

PROPOSITIO IV.

Radices augere, vel minuere data quantitate.

I. Sit æquatio $x^3-3x^2-10x+24=0$, quæ *ex Prop.* 1. *hujus* habet duas radices veras $+2$, $+4$, & unam falsam -3, augere volo ejus radices quantitate data $=3$.

Fiat $x+3=y$, erit $x=y-3$. Substituatur hic valor in æquatione loco ipsius x, erit

$$\begin{array}{r|rrrr} x^3 & =y^3 & -9y^2 & +27y & -27 \\ -3x^2 & & -3y^2 & +18y & -27 \\ -10x & & & -10y & +30 \\ +24 & & & & +24 \\ \hline \text{Summa} & y^3 & -12y^2 & +35y & + * =0 \end{array}$$

Hæc nova æquatio habet singulas radices ternario auctas, nempe $+5$, $+7$, $+0$ (nam $-3+3=0$) quæ quidem prius erant $+2$, $+4$, -3. Substituatur enim quælibet ex his in æquatione, ex. gr. $+5$, fiet $125-300+175=0$, ergo $+5$ est radix ejusdem æquationis *per Propos.* 1. *num.* 5.

II. Minuenda sit eadem æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ numero binario. Fiat $x - 2 = y$, erit $x = y + 2$. Substituatur in eadem æquatione hic valor loco ipsius x, erit

$$\begin{array}{r|r} x^3 & = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 \\ -3x^2 & -3y^2 - 12y - 12 \\ -10x & -10y - 20 \\ +24 & +24 \\ \hline \text{Summa} & y^3 + 3y^2 - 10y + * = 0 \end{array}$$

Hæc nova æquatio habet singulas radices binario minutas, nempe $0, -5, +2$, quæ prius erant $+2, -3, +4$. Substituatur enim quælibet ex his in æquatione, v. g. -5, erit $-125 + 75 + 50 = 0$, ergo *per Prop.* 1. *num.* 5. radix -5 est radix ejusdem æquationis.

COROLL. I. *Augendo radices æquationis, singulæ radices veræ augentur. Contra vero falsæ minuuntur. Nam si ad radicem falsam* -4 *addatur* $+3$, *minuitur & fit* -1. *Imo aliquando falsæ in veras transeunt, ut si ad falsam* -4 *addas* $+5$, *fit radix vera* $+1$. *Quod evidens est.*

COROLL. II. *Minuendo radices æquationis, radices falsæ augentur. Nam si ex radice falsa* -3 *subtrahitur quantitas* $+2$, *fit* -5, *ut patet. At veræ minuuntur, imo & aliquando fiunt falsæ, ut si ex radice* $+2$ *auferas* $+5$, *fiet* -2, *radix scilicet falsa.*

SCHOL. *Augendo radices æquationis habetur methodus convertendi radices falsas in veras, nec propterea veræ fiant falsæ; quod docuit* Cartesius (a), *& patet ex* Cor. 1.

PRO-

(a) Geometriæ lib. 3. edit. 3. pag. m. 74.

PROPOSITIO V.

Ex data æquatione secundum terminum tollere.

I. SI secundus terminus datæ æquationis afficitur signo +, augeantur radices quantitate cognita secundi termini divisa per exponentem æquationis. Si afficitur signo —, minuantur radices eadem quantitate; in utroque casu habebitur nova æquatio secundo termino carens.

Sit æquatio $x^2 + 6x - 16 = 0$, ex qua secundus terminus tolli debet.

Divisa quantitate cognita secundi termini 6 per exponentem 2, quotus 3 est quantitas, qua augeri debent (ob signum +) radices æquationis.

Fiat ergo ut in *Prop. antec.* $x + 3 = y$, erit $x = y - 3$, quo valore substituto in æquatione, loco ipsius x, erit

$$\begin{array}{r|l} x^2 & = y^2 - 6y + 9 \\ +6x & \quad\;\; + 6y - 18 \\ -16 & \qquad\quad\;\; - 16 \\ \hline \text{Summa} & y^2 \;\; * \;\; - 25 = 0 \end{array}$$

Est ergo $y = 5$, proinde $x \; (= y - 3) = 5 - 3 = 2$.

II. Sit æquatio $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$, in qua secundus terminus evanescere debeat.

Divisa quantitate cognita secundi termini per exponentem 3, habetur $\frac{12}{3} = 4$, quantitas, qua minui debent (ob signum —) æquationis datæ radices. Fiat ergo $x - 4$

$= y$,

$=y$, erit $x=y+4$, factaque hujus valoris substitutione, oritur nova æquatio secundo termino carens

x^3	$=y^3+12y^2+48y+64$
$-12x^2$	$-12y^2-96y-192$
$+44x$	$+44y+176$
-48	-48
Summa	$y^3 \; * \; -4y \; * \; =0$

III. Quid vero si secundus terminus ex æquatione tollendus utroque signo $+$ & $-$ afficitur?

Sit æquatio $x^2 \begin{matrix}-ax\\+bx\end{matrix} -ab=0$, ex qua tolli debet secundus terminus. Divisa quantitate cognita $-a+b$ per exponentem 2, habetur $\dfrac{-a+b}{2}$, seu $-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$.

Fiat $x-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b=y$, erit $x=y+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$, factaque hujus valoris substitutione, habetur æquatio secundo termino carens

x^2	$=y^2+ay-by+\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}b^2$
$\begin{matrix}-a\\+b\end{matrix}\,x$	$-ay+by-\frac{1}{2}a^2+ab-\frac{1}{2}b^2$
$-ab$	$-ab$
Summa	$y^2 \; * \; -\frac{1}{4}a^2-ab-\frac{1}{4}b^2=0$

Demonstratur per Coroll. 1. & 2. *Prop. antec.* radices veræ ac falsæ ita augeri possunt ac minui, ut fiant æquales nullitati, seu zero. Sic in primo exemplo æquatio x^2
$+6x$

$+6x-16=0$ habet duas radices, unam falsam -8, alteram veram $+2$, proinde augendo numero ternario utranque, prima erit $-8+3=-5$, altera vero $+2+3=5$, proinde $-5+5=0$.

Similiter sit æquatio $x^2-4x-12=0$; ut tollatur secundus terminus, minui debent ejus radices numero binario. Una ipsius radix vera est $+6$, altera falsa -2, proinde utranque minuendo, erit prima $+6-2=4$, altera $-2-2=-4$, hinc $+4-4=0$. Atque hinc est, quod in æquatione, cujus omnes radices æquales sunt, sublato secundo termino, omnes alii evanescunt, ut videre est in æquatione $x^3-12x^2+48x-64=0$, atque aliis. Qua ratione autem regula sic augendi, vel minuendi radices, sit inventa, patebit ex sequenti *Propos.* *ejusque Schol.* 1.

SCHOL. I. *Cum sæpe divisa quantitate cognita secundi termini per exponentem primi, oriatur fractio, ut in tertio exemplo superiori contigit, quo praxis facilior in æquationibus præsertim altioribus evadat, præstat loco fractionis indeterminatam aliquam assumere, & binomium* $x+n$, *vel* $x-n$ *elevare ad omnes illos gradus, quos æquatio data exigit; peractaque operatione, valores indeterminatæ* n^1, n^2, n^3 *&c. substituere. Sic enim molestia fractionum minuitur, & facilius poterit ad examen operatio tota revocari. Data sit æquatio, ex qua secundus terminus auferri debeat,* $x^3+5x^2-2x-24=0$. *Divisa quantitate cognita secundi termini per exponentem* 3, *habetur fractio* $\frac{5}{3}$, *fiat* $n=\frac{5}{3}$, & $x+n=y$, *erit* $x=y-n$, *quo quidem binomio ad secundam, & tertiam potestatem elevato, hoc est*

$x=y$

$$x = y - n$$
$$x^2 = y^2 - 2ny + n^2$$
$$x^3 = y^3 - 3ny^2 + 3n^2y - n^3$$

Positisque loco n, n^2, n^3 *eorum valoribus* $n = \frac{5}{3}$, $n^2 = \frac{25}{9}$ $n^3 = \frac{125}{27}$, *facili negotio invenitur*

x^3	$= y^3 - 5y^2 + \frac{75}{9}y - \frac{125}{27}$
$+ 5x^2$	$+ 5y^2 - \frac{50}{3}y + \frac{125}{9}$
$- 2x$	$- 2y + \frac{10}{3}$
$- 24$	$- 24$
Summa	$y^3 \quad * \quad - 93y - 308 = 0$

SCHOL. II. *In omni æquatione terminus secundus, qui deficit, supponi potest affectus utroque signo* + *&* —; *sic æquatio* $x^3 \; * \; - ax + b^3 = 0$ *supponitur* $x^3 \pm - ax + b^3 = 0$, *proinde facta comparatione cum termino, qui præcedit, nempe cum* $+ x^3$, *habetur & permutatio & successio signorum, hoc est* + — *&* + +. *Quod pariter accidit, facta comparatione cum termino, qui consequitur, nempe cum* — ax. *Nam similiter habetur* + — *&* — —; *ideoque in utroque casu indicatur una radix vera, & altera falsa* per Prop. 1. hujus num. 3.

PROPOSITIO VI.

Ex æquatione terminum tertium tollere.

I. Sit æquatio $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, ex qua tertius terminus sit auferendus.

Inve-

Inveniri debet quantitas, qua radices datæ æquationis ſic augeantur, aut minuantur, ut tertius terminus evaneſcat, quod quidem per analyſim obtinetur hoc artificio.

Sit quantitas quæſita $= z$, fiat $x + z = y$, erit $x = y - z$; ſubſtituto hoc valore ipſius x in data æquatione, erit.

$$\left.\begin{array}{r} x^3 \\ +px^2 \\ +qx \\ -r \end{array}\right| \begin{array}{l} = y^3 - 3zyy + 3z^2y - z^3 \\ \quad + pyy - 2pzy + pz^2 \\ \qquad\qquad + qy - qz \\ \qquad\qquad\qquad - r \end{array}$$

Cum igitur tertius terminus debeat evaneſcere, fiat æqualis zero, ſcilicet

$$3z^2y - 2pzy + qy = 0$$

Divid. per y $\quad 3z^2 - 2pz = -q$

Tum per 3 $\quad z^2 - \frac{2}{3}pz = -\frac{1}{3}q$

Occurrit æquatio ſecundi gradus reſolvenda, ut docebitur infra *Prop.* 1. *Cap.* 8. quæ ab hac non dependet. Addatur ſcilicet utrinque quadratum ex dimidio coefficientis ſecundi termini, nempe $\frac{1}{9}\,pp$, erit

$$z^2 - \frac{2}{3}pz + \frac{1}{9}pp = \frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q$$

Extr. Rad. $\quad z - \frac{1}{3}p = \sqrt{\frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q}$

$$z = \frac{1}{3}p + \sqrt{\frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q}$$

Sed $x = y - z$, ergo $x = y - \frac{1}{3}p - \sqrt{\frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q}$. Quo valore in data æquatione ſubſtituto, fiet æquatio termino tertio carens, ut in duobus ſequentibus exemplis.

1. Sit

1. Sit enim æquatio $x^3 - 4x^2 + 4x - 6 = 0$, erit $p = -4$ & $q = 4$, hinc $y - \frac{1}{3}p - \sqrt{\frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q} = y + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = y + \frac{2}{3}$. Est ergo $x = y + \frac{2}{3}$, ideoque erit

$$\begin{array}{r|l}
x^3 & = y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27} \\
-4x^2 & \quad\; - 4y^2 - \frac{16}{3}y - \frac{16}{9} \\
+4x & \qquad\qquad + 4y + \frac{8}{3} \\
-6 & \qquad\qquad\qquad - 6 \\
\hline
\text{Summa} & y^3 - 2y^2 \quad * - \frac{130}{27} = 0
\end{array}$$

2. Similiter sit æquatio data $x^3 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$, erit $p = -3$ & $q = 3$, proinde $y - \frac{1}{3}p - \sqrt{\frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q} = y + 1$. Fiat cum hoc valore nova æquatio, nempe

$$\begin{array}{r|l}
x^3 & = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \\
-3x^2 & \quad\; - 3y^2 - 6y - 3 \\
+3x & \qquad\qquad + 3y + 3 \\
-4 & \qquad\qquad\quad - 4 \\
\hline
\text{Summa} & y^3 \quad * \quad * - 3 = 0
\end{array}$$

Habetur ergo æquatio termino tertio carens, in qua $y = \sqrt[3]{3}$.

II. Sit æquatio quarti gradus, ex qua tertius terminus exterminari debeat, $x^4 \; * \; + px^2 + qx + r = 0$.

Fiat $x + z = y$, erit $x = y - z$, quo valore ipsius x in æquatione data substituto, habetur

x^4

$$\left.\begin{array}{l} x^4 \\ +px^2 \\ +qx \\ +r \end{array}\right| \begin{array}{r} =y^4-4zy^3+6z^2y^2-4z^3y+z^4 \\ +py^2-2pzy+pz^2 \\ +qy-qz \\ +r \end{array}$$

Fiat terminus $6z^2y^2+py^2=0$; dividendo per y^2, erit $6z^2+p=0$, hoc est $z^2=-\frac{p}{6}$, & $z=\sqrt{-\frac{p}{6}}$; habetur ergo valor ipsius z.

Data sit jam æquatio specialis $x^4 * -6x^2-8x-3=0$, ex qua tertius terminus auferendus sit. Facta comparatione terminorum hujus cum terminis æquationis superioris, erit $p=-6$, $q=-8$ &c. adeoque z $\left(=\sqrt{-\frac{p}{6}}\right)$ $=\sqrt{\frac{6}{6}}=1$. Est ergo $x=y-1$, qui valor si ponatur in æquatione data, oritur

$$\left.\begin{array}{l} x^4 \\ -6x^2 \\ -8x \\ -3 \end{array}\right| \begin{array}{r} =y^4-4y^3+6y^2-4y+1 \\ -6y^2+12y-6 \\ -8y+8 \\ -3 \end{array}$$

$$\text{Summa}\quad y^4-4y^3\quad *\quad *\quad *=0$$

Unde æquatio facillime resolvitur. Nam $y^4=4y^3$, proinde $y=4$. Sed posita fuit $x=y-z$, ergo $x=4-1=3$; est ergo 3 radix ipsius æquationis.

SCHOL. I. *Hoc eodem artificio inventa est regula tollendi ex æquationibus terminum secundum, quam in* Prop. ant. *docuimus. Nam si ex æquatione generali superiori secundus terminus supponatur æqualis zero, erit* $-3zyy+$

$pyy = 0$, *proinde* $3z = p$, *&* $z = \frac{p}{3}$; *unde patet, quantitatem addendam, vel subtrahendam radici datæ æquationis esse quantitatem cognitam secundi termini divisam per exponentem primi termini.*

SCHOL. II. *Eadem plane ratione tolli possunt ex æquationibus termini* quartus, quintus, sextus &c. *Sed quia pro quarto tollendo æquatio tertii gradus, pro quinto æquatio quarti gradus, pro sexto æquatio quinti gradus occurrit, ideo non est hujus loci ulterius progredi.*

PROPOSITIO VII.

Æquationem, in qua termini aliqui desunt, complere.

I. Augeatur radix æquationis datæ quantitate aliqua *per Prop.* 4. exurget æquatio completa.

Sit æquatio complenda $x^3 - 19x - 30 = 0$, in qua deest secundus terminus. Fiat *per Prop. cit.* $x + 1 = y$, erit $x = y - 1$. Substituatur hic valor loco x in data æquatione, erit

$$\begin{array}{r|l} x^3 & = y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \\ -19x & \qquad\qquad -19y + 19 \\ -30 & \qquad\qquad\qquad -30 \\ \hline \text{Summa} & y^3 - 3y^2 - 16y - 12 = 0 \end{array}$$

Habetur ergo æquatio completa cum secundo termino, in qua $y = x + 1$.

II. Sit

II. Sit æquatio incompleta $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$, in qua tertius terminus deficit. Fiat, ut supra, $x + 1 = y$, erit $x = y - 1$, & facta substitutione hujus valoris loco ipsius x, erit

$$\begin{array}{r|r} x^3 & = y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \\ -3x^2 & -3y^2 + 6y - 3 \\ +2 & +2 \\ \hline \text{Summa} & y^3 - 6y^2 + 9y - 2 = 0 \end{array}$$

En integra æquatio, in qua pariter $y = x + 1$.

Ratio est, quia secundus terminus v. g. deficit in æquatione, cum radices veræ æquantur falsis *per Prop.* 1. *num.* 4. ergo si una ex veris augeatur, integra æquatio restituitur.

PROPOSITIO VIII.

Æquationis radices per datam quantitatem multiplicare.

I. Est æquatio $x^3 - ax^2 - b^2x + abb = 0$, cujus radices $+a$, $+b$, $-b$ multiplicandæ sunt per datam quantitatem $= c$.

Fiat $cx = y$, erit $x = y : c$ (duo puncta (:) sunt divisionis signum *ex Schol.* 3. *Prop.* 8. *Cap.* 1.) Substituatur ubique hic valor in data æquatione loco ipsius x, erit nova æquatio

$$\frac{y^3}{c^3} - \frac{ay^2}{c^2} - \frac{b^2y}{c} + abb = 0$$

Et multiplicatis singulis terminis per c^3, factaque reductione, habetur

$$y^3 - acy^2 - bbc^2y + abbc^3 = 0$$

cujus radices sunt $+ac$, $+bc$, $-bc$.

II. Similiter est æquatio $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, cujus radices $+1$, $+2$, $+3$, multiplicari debent per quantitatem $= 2$.

Fiat $2x = y$, erit $x = y:2$, & hoc valore substituto in data æquatione loco ipsius x, oritur

$$\frac{y^3}{8} - \frac{6y^2}{4} + \frac{11y}{2} - 6 = 0$$

Multiplicentur omnes termini per cubum 8, factaque reductione, erit nova æquatio

$$y^3 - 12y^2 + 44y - 48 = 0$$

cujus radices sunt $+2$, $+4$, $+6$.

COROLL. I. *Ex utroque exemplo satis apparet, ad multiplicandam æquationem per datam quantitatem, satis esse eam multiplicare per progressionem Geometricam, cujus terminus primus sit* 1, *terminus secundus sit denominator rationis &c. Nam multiplicandæ sint radices ejusdem prioris æquationis per* c, *assumpta alia incognita* y *loco ipsius* x *erit, ut prius,*

$$\begin{array}{l} y^3 - ay^2 - b^2y + abb = 0 \\ 1. \quad c. \quad c^2. \quad c^3. \\ \hline y^3 - acy^2 - b^2c^2y + abbc^3 = 0 \end{array}$$

Simi-

Similiter multiplicandæ sint per 2 radices secundæ æquationis: assumpta y *loco ipsius* x, *&* *multiplicata æquatione per progressionem Geometricam, erit ut prius.*

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} y^3 & - & 6y^2 & + & 11y & - & 6 & = & 0 \\ 1. & & 2. & & 4. & & 8. & & \\ \hline y^3 & - & 12y^2 & + & 44y & - & 48 & = & 0 \end{array}$$

PROPOSITIO IX.

Radices æquationis dividere per datam quantitatem.

I. Sit æquatio $x^3 - ax^2 - b^2x + abb = 0$, cujus radices $+a$, $+b$, $-b$ dividere oporteat per quantitatem $= c$.

Fiat $\frac{x}{c} = y$, erit $x = cy$, & substituto hoc valore in data æquatione, erit

$$c^3y^3 - ac^2y^2 - b^2cy + abb = 0$$

Dividantur singuli termini per c^3, habetur

$$y^3 - \frac{ay^2}{c} - \frac{b^2y}{c^2} + \frac{abb}{c^3} = 0$$

cujus radices sunt $+\frac{a}{c}$, $+\frac{b}{c}$, $-\frac{b}{c}$.

COROLL. *Hinc apparet, ad dividendam æquationem per datam quantitatem, satis esse eam dividere per progressionem*

sionem Geometricam, cujus primus terminus sit 1, *secundus terminus sit denominator rationis. Nam assumpta nova incognita* y, *& progressione Geometrica* 1.c.c².c³ *&c. erit æquatio, ut prius, divisa per* c, *nempe*

$$\frac{\begin{matrix} y^3 - ay^2 - b^2y + abb = 0 \\ 1. \quad c. \quad c^2. \quad c^3. \end{matrix}}{y^3 - \frac{ay^2}{c} - \frac{b^2y}{c^2} + \frac{abb}{c^3} = 0}$$

II. Eadem ratione dividenda sit per 3 æquatio numerica superior $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, cujus radices sunt $+1$, $+2$, $+3$. Dividatur æquatio (assumpta incognita y) per progressionem Geometricam 1, 3, 9 &c. nempe

$$\frac{\begin{matrix} y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0 \\ 1. \quad 3. \quad 9. \quad 27. \end{matrix}}{y^3 - 2y^2 + \frac{11y}{9} - \frac{2}{9} = 0}$$

Habetur nova æquatio, cujus radices sunt $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1. Nam harum qualibet substituta in æquatione loco ipsius y, tota æquatio evanescit, proinde sunt radices quæsitæ *per Prop.* 1. *hujus num.* 5.

SCHOL. *Ut æquationum radices augeantur, minuantur, multiplicentur, aut dividantur ea ratione, quam docuimus, plane non opus est, ut illæ sint cognitæ, imo a Cartesio, & aliis tanquam prorsus incognitæ supponuntur. Nos tamen consulto, illustrandæ rei gratia, ut jam cognitas usurpavimus.*

PRO-

PROPOSITIO X.

Æquationem a fractionibus liberare.

I. MUltiplicetur radix æquationis per factum omnium denominatorum fractionum occurrentium, aut per numerum, qui omnes denominatores metitur.

Sit æquatio data $x^3 - \frac{ax^2}{b} + \frac{aax}{c} + \frac{a^3}{d} = 0$

Multiplicetur per factum omnium denominatorum bcd radix æquationis; hoc est fiat $bcdx = y$, erit $x = y : bcd$, factaque hujus valoris substitutione in data æquatione, oritur

$$\frac{y^3}{b^3c^3d^3} - \frac{ay^2}{b^3c^2d^2} + \frac{aay}{bc^2d} + \frac{a^3}{d} = 0$$

Multiplicentur singuli termini per $b^3c^3d^3$, habetur æquatio sine fractionibus

$$y^3 - acdy^2 + a^2b^2cd^2y + a^3b^3c^3d^2 = 0.$$

II. Similiter sit æquatio $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x - 24 = 0$. Multiplicetur radix æquationis per factum ex denominatoribus, hoc est per 10, nempe per progressionem Geometricam 1. 10 &c. *per Coroll. Prop. 8. hujus.*

$$\begin{array}{l} x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x - 24 = 0 \\ 1. \quad 10. \quad 100. \quad 1000. \\ \hline y^3 - 5y^2 + 20y - 24000 = 0 \end{array}$$

In qua quidem æquatione $y = 10x$, proinde erit $x = \frac{y}{10}$.

III. De-

III. Demum sit æquatio $x^3 * \frac{2}{3}x - \frac{81}{27} = 0$. Quia quantitas 3 metitur utrunque denominatorem, multiplicetur radix æquationis per 3 modo explicato, nempe

$$\begin{array}{l} x^3 \; * \; \frac{2}{3}x - \frac{81}{27} = 0 \\ 1.\; 3.\; 9. \quad 27. \\ \hline y^3 \; * \; 6y - 81 = 0. \end{array}$$

In hac æquatione habetur $y = 3x$, proinde dividi debent per 3 singulæ radices hujus, ut habeantur radices æquationis datæ, quod semper advertendum.

PROPOSITIO XI.

Æquationem a radicalibus liberare.

ID non eadem via semper assequimur; ideoque plura exempla rem illustrabunt.

I. Sit æquatio $x^3 * - 5x + \sqrt{2} = 0$. Fiat $x : \sqrt{2} = y$, erit $x = y\sqrt{2}$, & hoc valore in data æquatione substituto, erit

$$\begin{array}{rl} x^3 = & 2y^3\sqrt{2} \\ -5x = & -5y\sqrt{2} \\ +\sqrt{2} = & +\sqrt{2} \\ \hline \text{Summa} & 2y^3\sqrt{2} - 5y\sqrt{2} + \sqrt{2} \end{array}$$

Et divisis omnibus terminis per $\sqrt{2}$, fit æquatio sine radicalibus

$$2y^3 - 5y + 1 = 0.$$

II. Quandoque fit progressio Geometrica ex radicalibus, per quam tota æquatio multiplicata ab irrationalibus liberatur. Ecce exemplum x^4

$$x^4 + 2ax^3\sqrt{2} + 5abx^2 - a^3x\sqrt{8} - 2a^2b^2 = 0$$
$$1 \quad \sqrt{2}. \quad 2. \quad \sqrt{8}. \quad 4.$$
$$y^4 + 4ay^3 + 10aby^2 - 8a^3y - 8a^2b^2 = 0$$

Radices autem hujus æquationis dividendæ erunt per $\sqrt{2}$, ut habeantur radices æquationis datæ. Nam $y = x\sqrt{2}$.

III. Sæpe etiam tota æquatio dividitur per radicalium progressionem Geometricam

$$x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b = 0$$
$$1. \quad \sqrt[3]{2}. \quad \sqrt[3]{4}. \quad 2.$$
$$y^3 - ay^2 + 2aby - \tfrac{1}{2}a^2b = 0$$

In hac æquatione est $y = x : \sqrt[3]{2}$.

IV. Radicales ex æquationibus aliquando exterminantur per multiplicationem. Sit æquatio

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}} \times \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}} = 0$$

Multiplicentur radices universales *per Prop.* 12. *Cap.* 4.

$$\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}$$
$$\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}$$
$$\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{2}q\sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}$$
$$- \tfrac{1}{2}q\sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3} - (\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3)$$
$$\tfrac{1}{4}qq \quad * \quad * \quad - \tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{27}p^3}$$

$= \tfrac{1}{3}p$, proinde $x = \tfrac{1}{3}p$.

 V. Æqua-

V. Æquatio a radicalibus liberatur ſupponendo terminos radicales æquales literis ad libitum aſſumptis, quæ ſingulatim in uno æquationis membro collocantur, & tota æquatio elevatur ad potentiam ab exponente radicis indicatam. Sit æquatio

$$x^3 * -x\sqrt{a}+\sqrt{b}=0$$

Fiat $\sqrt{a}=p$, & $\sqrt{b}=q$, æquatio in hanc transformatur

$$x^3 * -px+q=0$$

Ponatur px ſeorſim in uno æquationis membro, nempe $px=x^3+q$, & (ob $\sqrt{a}=p$) tota æquatio elevetur ad ſecundam poteſtatem *per Reg. 4. Cap. 5.*

$$p^2x^2=x^6+2qx^3+q^2$$

Deinde ponatur $2qx^3$ in uno æquationis membro, hoc eſt $2qx^3=p^2x^2-x^6-q^2$, & iterum utrunque membrum ad ſecundam poteſtatem elevetur ob $\sqrt{b}=q$; *per Reg. cit.* erit

$$4q^2x^6=p^4x^4-2p^2x^8+x^{12}-2p^2q^2x^2+2q^2x^6+q^4$$

hoc eſt $x^{12}-2p^2x^8-2q^2x^6+p^4x^4-2p^2q^2x^2+q^4=0$

Quod ſi fiat $x^2=y$, deprimi poterit ad æquationem ſexti gradus ſcilicet

$$y^6-2p^2y^4-2q^2y^3+p^4y^2-2p^2q^2y+q^4=0$$

Demum in hac ultima æquatione loco p^2, p^4, q^2, q^4, ſubſtituantur eorum valores, nempe a, a^2, b, b^2 obtinebitur æquatio a radicalibus expedita

$$y^6-2ay^4-2by^3+a^2y^2-2aby+b^2=0$$

SCHOL.

SCHOL. *Si radicales sint cubicæ, æquationis membra ad tertiam potestatem elevantur.*

PROPOSITIO XII.

Æquationem datam in aliam commutare, in qua quantitas cognita cujuscunque termini, vel etiam terminus ultimus fiat datæ quantitati æqualis.

I. INveniri debet quantitas, per quam ita multiplicentur æquationis datæ radices, ut quantitas cognita in aliam datam commutetur.

Sit æquatio $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, quantitas data $= a$, quæsita sit $= z$.

Fiat $x = \frac{y}{z}$, & hic valor ponatur in data æquatione loco ipsius x, assumpta nova incognita y, erit

$$y^3 - pzy^2 + qz^2y - rz^3 = 0$$

1. Fieri debeat quantitas cognita secundi termini $p = a$: si supponatur $pz = a$, erit $z = \frac{a}{p}$.

2. Quantitas cognita tertii termini q fieri debeat æqualis datæ quantitati a, erit $qz^2 = a$, proinde $z^2 = \frac{a}{q}$, atque hinc $z = \sqrt{\frac{a}{q}}$.

3. Pari modo fieri debeat ultimus terminus $rz^3 = a$, erit $z^3 = \frac{a}{r}$, ideoque $z = \sqrt[3]{\frac{a}{r}}$.

 Jam

Jam si multiplicetur secundus terminus cujuscunque æquationis per valorem inventum ipsius z, tertius terminus per quadratum, quartus per cubum ejusdem valoris, & sic deinceps, habebitur æquatio quæsita. Tyronum gratia res exemplis illustratur.

Sit æquatio $x^3 - 3x^2 + 18x - 54 = 0$, quæritur loco ipsius alia, in qua coefficiens secundi termini 3 sit $= 2$. Erit ergo $p = 3$, $a = 2$; & cum sit ex dictis $z = \frac{a}{p}$, erit $z = \frac{2}{3}$, proinde si per hunc valorem multiplicentur radices hujus æquationis, assumpta nova incognita y, ut moris est, habebitur

$$\begin{array}{l} x^3 - 3x^2 + 18x - 54 = 0 \\ \quad\quad \frac{2}{3} \quad\quad \frac{4}{9} \quad\quad \frac{8}{27} \\ \hline y^3 - 2y^2 + 8y - 16 = 0 \end{array}$$

II. Sit æquatio $x^3 - 12x^2 + 9x - 27 = 0$, cujus loco quæritur alia, in qua quantitas cognita tertii termini sit 4. Erit $q = 9$, $a = 4$.

Quia vero $z = \sqrt{\frac{a}{q}}$ ex dictis superius, erit $z = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, per hanc igitur quantitatem multiplicandæ sunt æquationis radices, nova incognita y assumpta, hoc est

$$\begin{array}{l} x^3 - 12x^2 + 9x - 27 = 0 \\ \quad\quad \frac{2}{3} \quad\quad \frac{4}{9} \quad\quad \frac{8}{27} \\ \hline y^3 - 8y^2 + 4y - 8 = 0 \end{array}$$

III.

III. Sit pro tertio casu eadem æquatio $x^3 - 12x^2 + 9x - 27 = 0$, quæ in aliam commutanda, cujus terminus ultimus sit $= 1$.

Erit $r = 27$, $a = 1$: quia vero ex annotatis superius $z = \sqrt[3]{\frac{a}{r}}$, erit $z = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$, per quam quidem quantitatem multiplicari debent radices datæ æquationis, ut factum vides, & nova incognita y surrogari.

$$\begin{array}{c} x^3 - 12x^2 + 9x - 27 = 0 \\ \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{27} \\ \hline y^3 - 4y^2 + y - 1 = 0 \end{array}$$

COROLL. *Nemo non videt, hujus propositionis mysterium in eo esse, ut per Analysim inveniatur incognitæ illius z assumptæ quantitas, per quam multiplicatis datæ cujuscunque æquationis radicibus, alia nova oritur æquatio, in qua terminorum coefficientes, sive etiam ultimus terminus, sunt datæ quantitati æquales.*

PROPOSITIO XIII.

Invenire maximum duarum æquationum divisorem communem.

I. MAjor æquatio, ea nempe, quæ altioris gradus incognitam continet (si sint æqualis gradus, utravis per aliam) dividatur per minorem, omnino ut fit in

aliis

aliis quantitatibus compositis *per Prop.* 8. *Cap.* 1. & neglecto quoto, continuetur divisio, donec incognita in residuo fiat minoris dimensionis, quam in divisore. Tunc enim divisor ipse dividatur per illud residuum, neglecto quoto; & sic semper, donec nihil ex divisione remaneat. Nam talis divisor erit maximus divisor communis, qui quæritur; per quem æquationes illæ datæ sunt divisibiles. Exemplis res illustratur.

Sint duæ æquationes $3x^3 - 12x^2 + 15x - 6 = 0$, & $-12x^2 + 30x - 18 = 0$, quarum maximus divisor communis quæritur.

Cum utraque sit multiplicata per 3, dividi poterit per 3, ut termini minores fiant; erunt $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$, & $-4x + 10x - 6 = 0$, imo hæc adhuc dividi potest per 2, unde fit $-2x^2 + 5x - 3 = 0$.

Quia vero dividendo primum terminum x^3 per $-2x^2$, quotus est $\frac{x^3}{-2x^2} = \frac{x}{-2}$, hinc apparet, æquationem illam actu dividi non posse, quin prius multiplicetur per denominatorem -2. Quo facto, habetur $-2x^3 + 8x^2 - 10x + 4 = 0$. Hæc autem divisa per $-2x^2 + 5x - 3$ (neglecto quoto) dat residuum $+3x^2 - 7x + 4$.

Continetur divisio, & quia dividendo $3x^2$ per $-2x^2$, quotus est $= \frac{3}{-2}$, signum est, æquationem dividendam prius multiplicari debere per denominatorem -2, unde fit $-6x^2 + 14x - 8 = 0$; factaque divisione, habetur residuum $-x + 1$, seu $x - 1 = 0$, per quod dividendo quantitatem ipsam, quæ hactenus fuit divisor, scilicet $-2x^2$

$+ 5x$

$+5x-3$, nihil remanet. Eſt ergo $x-1$ maximus diviſor communis duarum datarum æquationum, qui tamen multiplicari debet per eandem quantitatem, per quam primo æquatio utraque communiter fuit diviſa, eritque $3x-3=0$.

II. Sint duæ æquationes $x^3-16x^2+61x-66=0$, & $x^3+3x^2-34x+48=0$, quarum maxima communis menſura quæritur. Dividatur prima per ſecundam, & neglecto quoto 1, per reſiduum $-19x^2+95x-114$ (quod, ut ſimplicius evadat, dividitur per -19, fitque x^2-5x+6) dividatur ſecunda æquatio data: neglecto quoto x, habetur reſiduum $8x^2-40x+48$, quod diviſum per 8, dabit x^2-5x+6. Hoc autem cum ſit idem ac ſuperius reſiduum, ſi fiat diviſio, nihil remanet. Sunt ergo datæ æquationes diviſibiles per x^2-5x+6 maximum earum diviſorem communem.

III. Sint duæ æquationes $x^4-4ax^3+11a^2x^2-20a^3x+12a^4=0$, & $x^4-3ax^3+12a^2x^2-16a^3x+24a^4=0$. Dividatur prima per ſecundam, habetur 1 pro quoto: quo neglecto, remanet $-ax^3-a^2x^2-4a^3x-12a^4$, quo diviſo per $-a$, habetur primum reſiduum $x^3+ax^2+4a^2x+12a^3$.

Per hoc primum reſiduum dividatur ſecunda æquatio data, habetur quotus $x-4a$; quo neglecto, remanet $12a^2x^2-12a^3x+72a^4$, atque hoc diviſo per $12a^2$, habetur ſecundum reſiduum $x^2-ax+6a^2$. Per hoc ſecundum reſiduum dividatur primum, nihil remanet. Maximus ergo diviſor communis eſt $x^2-ax+6a^2$.

COROLL. I. *Ex primo exemplo conſtat, communem diviſorem inventum tunc ſolum eſſe multiplicandum per quantita-*

titatem, per quam divisa fuit æquatio, cùm non una tantum, sed utraque æquatio per communem quantitatem divisa fuerit. Sic x — 1 *multiplicatur quidem per* 3, *per quem divisa fuerat utraque æquatio, non autem per* 2, *per quem una tantum æquatio fuit divisa.*

COROLL. II. *Reperto communi duarum æquationum divisore, habentur pariter earum radices, & problematis resolutio. Nam divisoris communis radices sunt eædem ac radices earundem æquationum. Sic in secundo exemplo divisor communis, seu æquatio* $x^2 - 5x + 6 = 0$ *habet radices* 3 *&* 2, per Prop. 1. hujus num. 5., *quas datarum æquationum easdem esse facile intelligitur.*

SCHOL. I. *Si æquationes fuerint plures, quam duæ, reperto communi divisore inter primam & secundam, inveniri deinde eodem modo debet divisor communis inter tertiam æquationem & divisorem communem jam inventum. Sed hoc perraro accidit.*

SCHOL. II. *Hanc regulam eandem esse ac regulam communis Arithmeticæ, qua invenitur maxima communis mensura, seu divisor inter duos numeros datos, iisdemque principiis inniti, nemo non videt.*

PROPOSITIO XIV.

Duarum æquationum divisorem communem alia ratione investigare.

I. SInt duæ æquationes Propos. præc. quarum divisor communis quæritur, nempe *A* & *B*

A x^4

$$A \quad x^4 - 4ax^3 + 11a^2x^2 - 20a^3x + 12a^4 = 0$$

$$B \quad x^4 - 3ax^3 + 12a^2x^2 - 16a^3x + 24a^4 = 0$$

Sumatur ex A primi termini valor *per Coroll.* 1. *Prop.* 1. *Cap.* 5. erit $x^4 = 4ax^3 - 11a^2x^2 + 20a^3x - 12a^2$, qui ſurrogetur in æquatione B loco x^4, habebitur, facta terminorum inutilium reductione, æquatio

$$\textit{Div. per } a) \quad ax^3 + a^2x^2 + 4a^3x + 12a^4 = 0$$

$$C \quad x^3 + ax^2 + 4a^2x + 12a^3 = 0$$

Valor ipſius x^3 ex hac æquatione C ſumptus ponatur in æquatione A, non ſolum loco ſecundi termini $-4ax^3$, ſed etiam loco primi x^4 (multiplicando $-ax^2 - 4a^2x - 12a^3 \times x$, ut fiat $= x^4$) erit primo $x^4 = -ax^3 - 4a^2x^2 - 12a^3x$; ſurrogato deinde valore ejuſdem x^3 tam pro $-ax^3$ hujus æquationis, quam pro $-4ax^3$ æquationis A (hoc eſt pro $-5ax^3$) ſcilicet $5a^2x^2 + 20a^3x + 60a^4$, æquatio prima transformatur in ſequentem

x^4	$= -4a^2x^2 - 12a^3x$
$-5ax^3$	$+5a^2x^2 + 20a^3x + 60a^4$
$11a^2x^2 + 20a^3x$	$+11a^2x^2 - 20a^3x$
$+12a^4$	$+12a^4$
Summa	$12a^2x^2 - 12a^3x + 72a^4 = 0$

$$\textit{Divid. per } 12a^2) \quad x^2 - ax + 6a^2 = 0$$

Sumatur ex hac poſtrema æquatione valor primi termini, erit *per Coroll. cit.* $x^2 = ax - 6a^2$, qui ſurrogetur ubique

 in ter-

in tertia æquatione C, etiam pro primo termino (ducendo $ax - 6a^2 \times x$, ut fiat ad x^3 æqualis) factaque terminorum substitutione, invenitur

$$6a^2x - 6a^2x + 12a^3 - 12a^3 = 0$$

Cumque termini omnes per signa contraria sese destruant, signum est, æquationem $x^2 - ax + 6a^2 = 0$, ex qua terminorum contrarietas ista derivatur, esse communem divisorem maximum datarum æquationum, qualem prorsus in secundo exemplo *Prop. præc.* invenimus.

II. Quæritur divisor communis duarum æquationum, quæ sequuntur *M* & *N*.

$$M \quad x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 14\tfrac{1}{2}x + 5 = 0$$
$$N \quad x^3 + 4x^2 + 8x + 8 = 0$$

Sumatur ex secunda valor primi termini *per Coroll.* 1. *Prop.* 1. *Cap.* 5. nempe

$$x^3 = -4x^2 - 8x - 8$$

Quo posito in prima æquatione (multiplicando illum per x, ut fiat ad x^4 æqualis) habetur $2x^2 + 6\tfrac{1}{2}x + 5 = 0$, & multiplicando per 2 ad fractionem eliminandam, erit $4x^2 + 13x + 10 = 0$. Hac divisa per 4, oritur æquatio *R*

$$R \quad x^2 + \frac{13x + 10}{4} = 0$$

Valor hujus x^2 ex hac æquatione *R* desumptus *per Coroll. cit.* (hoc est $\frac{-13x - 10}{4}$) surrogetur in secunda æquatione

tione *N* modo jam explicato, invenitur $\frac{49x+98}{16}=0$, & dividendo per $\frac{49}{16}$, habetur quotus $x+2=0$, adeoque $x=-2$.

Ponatur demum hic valor in æquatione tertia *R*, provenit

$$4-\frac{26+10}{4}=0, \text{ hoc est } \frac{-26+26}{4}=0$$

Proinde arguitur $x+2=0$, unde ista terminorum oritur oppositio, esse datarum æquationum divisorem communem quæsitum.

SCHOL. *Hoc problema sane ingeniosum, quod* Joh. Huddenius ([a]) Belga *vir subtilissimus excogitavit, usum quoque habet ad inveniendum communem divisorem duarum quarumcunque quantitatum. Nihil enim obstat, quin illæ considerari possint instar duarum æquationum, & æquari nihilo: imo in illis sumi potest ad libitum pro incognita quæcunque litera, quæ in utraque earum reperiatur. Sic in duabus sequentibus quantitatibus, vel æquationibus* $d^3-ad^2+2a^2b-2abd=0$ & $d^4-b^2d^2+a^2b^2-a^2d^2=0$ *sumi potest ad libitum pro incognita* d, a, *vel* b; *& procedendo eo ordine, quem nos in duobus exemplis sequuti sumus, invenietur communis earum divisor* $d-a$, *siquidem* d *pro incognita fuerit assumpta.*

([a]) V. in fine Geometr. Renati des Cartes edit. 3. ann. 1683.

CAPUT VII.

De Resolutione Æquationum compositarum, quæ radices rationales habent.

PROPOSITIO I.

Æquationis datæ radices rationales, si quæ sint, invenire.

I. INveniantur omnes ultimi termini divisores *per Prop. 9. Cap.* 1. ex quibus una cum incognita fiant totidem æquationes simplices, & per illas sigillatim dividatur æquatio: nam quæ exacte, & sine ullo residuo æquationem datam dividet, erit radix rationalis quæsita.

Sit æquatio $x^3 - 9xx + 22x - 8 = 0$. Divisores ultimi termini *per Prop. cit.* sunt 1, 2, 4, 8. Quia vero ex mutatione signorum dignoscitur *per num.* 3. *Prop.* 1. *Cap.* 6. radices omnes esse veras, proinde æquationes simplices, per quas tentari debet divisio, erunt omnes cum signo $-$, nempe $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 4 = 0$, $x - 8 = 0$. Divisio autem frustra tentatur per $x - 1$, & per $x - 2$, quare nec $+1$, nec $+2$ possunt esse radices quæsitæ. Succedit autem divisio sine ullo residuo per $x - 4$, ut instituta divisione patet.

$x - 4$)

$$
\begin{array}{r|l|l}
x-4) & x^3 - 9xx + 22x - 8 = 0 & x^2 \\
 & x^3 - 4xx & -5x \\
 & & +2 \\
\hline
 & 0 - 5xx + 22x & \\
 & - 5xx + 20x & \\
\hline
 & 0 + 2x - 8 & \\
 & + 2x - 8 & \\
\hline
 & 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Eſt ergo $+4$ una ex radicibus quæſitis, & ex hac diviſione oritur æquatio ſecundi gradus, nempe $xx - 5x + 2 = 0$. Cujus radices ut in inveniantur, tentanda non eſt diviſio per $x - 1 = 0$, aut per $x - 2 = 0$. Nam cum per has quantitates tota æquatio ex dictis diviſibilis non fuerit, neque una ejuſdem pars diviſibilis erit.

Tentetur itaque diviſio per $x - 4 = 0$, & per $x - 8 = 0$: ſed cum neque per hos diviſores diviſio exacte ſuccedat, ſignum eſt, alias duas radices non eſſe rationales. Quæ tamen obtineri poterunt *per Prop.* 1. *&* 3. *Cap.* 8., eritque altera $= \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$, per quam ſi dividatur eadem æquatio ſecundi gradus $xx - 5x + 2 = 0$, emerget tertia radix quæſita $= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$.

II. Sit alia æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$, cujus radices rationales inquiruntur.

Diviſores ultimi termini *per Prop.* 9. *Cap.* 1. ſunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Ex ſignis autem æquationis propoſitæ *per num.* 3. *Prop.* 1. *Cap.* 6. patet radices fore duas quidem veras & unam falſam, proinde æquationes ſimplices, per quas tentari debet diviſio, erunt tam cum ſi-

gno

gno $+$, quam cum signo $-$, hoc est $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 3 = 0$ &c. Divisio autem frustra tentatur per $x - 1$, & per $x + 1$. Sed exacte succedit per $x - 2$, per $x + 3$, & per $x - 4$. Sunt ergo radices quæsitæ $+2$, -3, $+4$, ut computanti sit evidens.

III. Demum sit æquatio $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, cujus radices rationales quæruntur.

Ex signis æquationis apparet *per num.* 3. *Prop.* 1. *Cap.* 6. radices tres esse veras, & unam falsam. Inveniantur omnes divisores ultimi termini *per Prop.* 9. *Cap.* 1. Cum divisio exacte fieri non possit per $x - 1$, neque per $x + 1$, succedat autem sine ullo residuo per $x - 2$, erit $+2$ una ex radicibus veris.

Ex divisione hujusmodi oritur æquatio $x^3 - 2x^2 - 23x + 60 = 0$, quæ frustra dividitur per $x - 2$, vel per $x + 2$, succedit tamen exacta divisio per $x - 3$. Habetur ergo $+3$ radix vera, & ex divisione oritur æquatio secundi gradus $x^2 + 1x - 20 = 0$. Cujus unam radicem esse veram, alteram falsam ex signis satis apparet. Dividatur itaque per $x - 4$, divisio succedit sine residuo, & quotus est $+5$, proinde aliæ duæ radices habentur $+4$, -5 una vera, altera falsa.

Schol. *Æquationis divisionem per tot divisores tentare si cui res molesta sit, sequenti methodo uti poterit, quæ divisores illos ad pauciores reducit. Ceterum si nullus sit divisor, qui datam æquationem exacte & sine ullo residuo dividere possit, signum est, nullam dari radicem rationalem, quod notetur.*

PRO-

PROPOSITIO II.

Radices rationales propius investigare.

I. SIt æquatio $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, cujus radices rationales quærimus. Inveniantur *per Prop.* 9. *Cap.* 1. divisores ultimi termini, nempe 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Deinde æquationis datæ radices minuantur unitate *per Prop.* 4. *Cap.* 6. hoc est fiat $x - 1 = y$, ideoque erit $x = y + 1$, unde

$$\begin{array}{r|r} x^3 & = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \\ -9x^2 & -9y^2 - 18y - 9 \\ +26x & +26y + 26 \\ -24 & -24 \\ \hline \text{Summa} & y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0 \end{array}$$

Divisores ultimi termini hujus secundæ æquationis sunt 1, 2, 3, 6. Cum autem radices hujus deficiant unitate a radicibus datæ æquationis, hæ, addita unitate, fient æquales prioribus, hoc est

$$\begin{array}{l} 1 + 1 = 2 \\ 2 + 1 = 3 \\ 3 + 1 = 4 \\ 6 + 1 = 7 \end{array}$$

Ex omnibus itaque divisoribus ultimi termini primæ æquationis, nempe 24, illi tantum seligantur, qui cum his convenire, & utrique æquationi communes esse reperiun-

riuntur, scilicet 2, 3, 4, nam 7 non reperitur inter divisores primæ æquationis. Ecce tibi tres tantum divisores, seu melius tres radices (pauciores enim esse non possunt *per num.* 1. *Prop.* 1. *Cap.* 6.) datæ æquationis.

II. Quod si æquatio data radices habeat partim veras, partim falsas, divisores ultimi termini æquationis transformatæ & augeri & minui debent ea quantitate, qua minuta fuit radix æquationis propositæ, ut detegantur radices tam veræ, quam falsæ. Exemplo res fit clarissima.

Sit æquatio $x^4 * -15x^2 + 10x + 24 = 0$, quæ duas habet radices veras $+2$, $+3$, & duas falsas -4, -1, quæ tamen supponuntur non cognitæ. Minuatur æquatio unitate *per Prop.* 4. *Cap.* 6. hoc est, fiat $x - 1 = y$, erit $x = y + 1$, proinde

$$\begin{array}{r|r} x^4 & = y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 \\ -15x^2 & -15y^2 - 30y - 15 \\ +10x & +10y + 10 \\ +24 & +24 \\ \hline \text{Summa} & y^4 + 4y^3 - 9y^2 - 16y + 20 = 0 \end{array}$$

Radices veræ hujus æquationis deficiunt unitate a radicibus veris æquationis datæ *per Cor.* 2. *Prop.* 4. *Cap.* 6. Contra vero radices falsæ erunt unitate majores. Itaque divisores ultimi termini 20 (inter quos quæsitæ radices latent) si augeantur unitate, fient æquales radicibus veris datæ æquationis. Contra vero si minuantur unitate, fient æquales radicibus falsis ipsius æquationis datæ. Divisores ultimi termini sunt 1, 2, 4, 5, 10, 20 *per Prop.* 9. *Cap.* 1. qui unitate aucti fiunt 2, 3, 5, 6, 11, 21. Conferantur

cum

cum divisoribus ultimi termini æquationis datæ, hoc est 24; nempe cum 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, tres tantum utrique æquationi communes inveniuntur, scilicet 2, 3, 6. Ex quibus duo sunt radices veræ quæsitæ, hoc est 2 & 3. Minuti vero unitate sunt 0, 1, 3, 4, 9, 19, qui si conferantur cum divisoribus æquationis datæ, nempe cum 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, inveniuntur tres tantum cum his convenire, scilicet 1, 3, 4, ex quibus habentur duæ radices falsæ quæsitæ — 1, — 4.

COROLL. *Redactis hoc pacto ad paucissimos ultimi termini divisoribus, facile inveniuntur radices rationales, vel dividendo per illos datam æquationem, ut in propositione antecedenti factum est; vel illos substituendo in æquatione proposita loco incognitæ, ut docuimus* in Propos. 1. Cap. 6. num. 5. *Ratio autem hujus methodi fundatur* in Coroll. 1. & 2. Prop. 4. Cap. 6.

SCHOL. *Hujus inventi laudem* Jacobo à Waessenaer *Ultrajectino egregio Geometræ* Franciscus a Schooten (a) *acceptam refert.*

PROPOSITIO III.

Idem problema in æquationibus literalibus.

Sit æquatio ex literis composita, cujus radices rationales inquiruntur,

$$\begin{aligned}x^3 - ax^2 - abx + abd &= 0\\ + bx^2 + adx &\\ - dx^2 - bdx &\end{aligned}$$

Z I. Cum

(a) Comment. in lib. III. Geometr. Cartes. p. m. 307.

I. Cum singulæ radices appareant in secundo termino sub signo contrario *per num.* 2. *Prop.* 1. *Cap.* 6. tentari debet divisio per $x - a = 0$, aut per $x + b = 0$, quæ cum exacte, & sine ullo residuo succedat, patet radices datæ æquationis esse $+ a$, $- b$, $+ d$.

II. Quod si æquatio sit magis composita, fiat æquatio ex singulis terminis, in quibus sunt eædem literæ, & supponantur æquales zero *per Cor.* 2. *Prop.* 2. *Cap.* 6. ut sic obtineri possit incognitæ valor. Exemplo res fit clarior. Sit data æquatio

$$\begin{array}{l} x^3 - 2ax^2 + a^2x - abb = 0 \\ \quad - bx^2 + abx - b^3 \\ \qquad\qquad + bbx \end{array}$$

Fiat æquatio ex omnibus terminis, in quibus reperitur quantitas bb, & supponatur æqualis zero, idest $bbx - abb - b^3 = 0$. Hæc dividatur per bb, quotus $x - a - b = 0$ est divisor, per quem si dividas æquationem datam, nihil remanet, proinde $a + b$ est una ex illius radicibus; & ex divisione oritur æquatio secundi gradus $x^2 - ax + bb = 0$, cujus radices facile erit invenire *per Prop.* 1. *&* 3. *Cap.* 8.

III. Sit demum æquatio, cujus radices rationales quæruntur

$$\begin{array}{l} x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd = 0 \\ \quad - bx^3 + acx^2 - adbx \\ \quad - cx^3 + adx^2 - acdx \\ \quad - dx^3 + bcx^2 - bcdx \\ \qquad\quad + bdx^2 \\ \qquad\quad + cdx^2 \end{array}$$

Fiat æquatio ex omnibus illis terminis, in quibus reperitur quan-

quantitas abd, eos ſupponendo æquales zero, nempe $-abdx+abcd=0$, erit $abdx=abcd$, & $x=c$.

Dividatur æquatio propoſita per $x-c=0$, nihil remanet, proinde $+c$ eſt una ex illius radicibus. Diviſa autem ipſamet data æquatione per $x-c=0$, oritur æquatio tertii gradus, quæ ſequitur,

$$\begin{array}{llll} x^3 - ax^2 & + abx & - abd = 0 \\ \quad - bx^2 & + adx & \\ \quad - dx^2 & + bdx & \end{array}$$

Fiat iterum æquatio ex omnibus illis terminis, in quibus reperitur ad, eos ſupponendo æquales zero, hoc eſt $adx-abd=0$, erit $x=b$; & cum diviſio, quæ tentatur per $x-b=0$, exacte ſuccedat, habetur ſecunda radix datæ æquationis, eademque ratione reliquæ duæ obtineri poſſunt.

PROPOSITIO IV.

Alia methodus æquationes compoſitas reſolvendi.

INvenienda ſunt radices æquationis propoſitæ, nempe

$$\begin{array}{lllll} x^4 - dx^3 & + abx^2 & - abcx & + abcd = 0 \\ \quad - bx^3 & + acx^2 & - abdx & \\ \quad - cx^3 & + adx^2 & - acdx & \\ \quad - dx^3 & + bcx^2 & - bcdx & \\ & + bdx^2 & & \\ & + cdx^2 & & \end{array}$$

Primo dividatur æquatio in duas æquationes, quarum altera contineat omnes terminos, in quibus quantitas c reperitur, altera reliquos, erit

$$\begin{aligned} 1.^a \quad & -cx^3 + acx^2 - abcx + abcd = 0 \\ & \qquad + bcx^2 - acdx \\ & \qquad + cdx^2 - bcdx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.^a \quad & x^4 - ax^3 + abx^2 - abdx = 0 \\ & \qquad - bx^3 + adx^2 \\ & \qquad - dx^3 + bdx^2 \end{aligned}$$

Patet, primam dividi posse per quantitatem c, secundam per x: quo facto, habetur

$$\begin{aligned} 1.^a \quad & -x^3 + ax^2 - abx + abd = 0 \\ & \qquad + bx^2 - adx \\ & \qquad + dx^2 - bdx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.^a \quad & x^3 - ax^2 + abx - abd = 0 \\ & \qquad - bx^2 + adx \\ & \qquad - dx^2 + bdx \end{aligned}$$

Harum prima per secundam exacte dividitur, ut patet, & quotus est -1; unde apparet, haberi ex hac secunda æquatione divisorem exactum primæ. Per hanc si æquatio proposita dividatur, habebitur $x - c = 0$, una scilicet ex radicibus quæsitis. Restat autem æquatio ipsa ad gradum inferiorem depressa, scilicet

$$\begin{aligned} & x^3 - ax^2 + abx - abd = 0 \\ & \qquad - bx^2 + adx \\ & \qquad - dx^2 + bdx \end{aligned}$$

Hæc

Hæc ſimiliter dividatur in duas alias æquationes, in quarum una ſint termini, in quibus quantitas b reperitur, in alia reliqui, erit

$$1.^a \quad -bx^2 + abx - abd = 0$$
$$+ adx$$

$$2.^a \quad x^3 - ax^2 + adx = 0$$
$$- dx^2$$

Dividatur prima per b, ſecunda per x; erit

$$1.^a \quad -x^2 + ax - ad = 0$$
$$+ dx$$

$$2.^a \quad x^2 - ax + ad = 0$$
$$- dx$$

Quarum prima per ſecundam exacte dividitur: nam quotus eſt -1, & nihil remanet. Per hanc ſecundam igitur dividatur ſuperior tertii gradus, habebitur $x - b$ pro ſecunda vera radice datæ æquationis, & remanet æquatio ſecundi gradus, videlicet

$$x^2 - ax + ad = 0$$
$$- dx$$

Quæ ſimiliter diviſibilis eſt in alias duas, nimirum

$$-ax + ad = 0, \ \& \ x^2 - dx = 0$$

Harum una diviſa per a, altera per x, habentur $-x + d = 0$, & $x - d = 0$; ex quibus prima cum ſit exacte diviſi-

visibilis per secundam (nam quotus est -1, & nihil remanet) dividi per hanc poterit æquatio superior secundi gradus, nempe

$$\begin{array}{l} x^2 - ax + ad = 0 \\ \quad - dx \end{array}$$

atque erit $x - d$ tertia radix quæsita: quarta autem $x - a$, facta divisione, habetur ex quoto.

COROLL. I. *Vel ex hoc uno exemplo apparet, methodum in eo esse: 1.° Ut æquatio proposita in duas dividatur æquationes, quarum quælibet contineat terminos iisdem fere literis conflatos. 2.° Ut dividendo per quantitatem, quæ in illis communiter reperitur, earum æquationum terminos, ad inferiorem gradum æquationes illæ deprimantur. 3.° Ut observetur, an una æquatio per alteram sit exacte & sine ullo residuo divisibilis: nam tunc illa erit communis mensura, hoc est dividere poterit non solum illam æquationis partem, sed etiam totam æquationem datam, & aliquam ex illius radicibus exhibere. Ratio est, quia quantitas, quæ exacte dividit partes, etiam totum dividat necesse est. Ceterum æquatio proposita dividi poterat in duas alias alio, vel alio modo, ac a nobis factum est, ut consideranti patebit.*

COROLL. II. *Quod si non omnes æquationis datæ radices hac ratione inveniri possint, indicio est, reliquas esse irrationales, de quibus inferius.*

PRO-

PROPOSITIO V.

Æquationes compositas, in quibus duæ, vel plures radices sunt æquales, resolvere.

I. SI data æquatio duas æquales radices habere supponitur, multiplicetur per quancunque progressionem Arithmeticam, hoc est primus terminus æquationis per primum terminum progressionis, secundus terminus per secundum &c. & productum, quod inde fit, erit $=0$, sicuti æquatio ipsa data supponitur $=0$. Deinde inveniatur æquationum duarum, datæ & productæ, communis divisor *per Prop.* 13. *Cap.* 6. per quem divisa ipsamet æquatio data, quoties opus sit, exhibebit radices æquales. Sit æquatio

$$\begin{array}{l} x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \\ \;3 \quad\;\; 2 \quad\;\; 1 \quad\;\; 0 \\ \hline 3x^3 - 10x^2 + 8x = 0 \end{array}$$

Hæc divisa per x fit uno gradu inferior, nempe

$$3x^2 - 10x + 8 = 0$$

Divisor autem communis hujus & datæ æquationis est $x - 2 = 0$ *per Prop.* 13. *Cap.* 6. per quem data æquatio bis divisa dat radices 2, 2, 1.

II. Poterat autem eadem æquatio per progressionem Arithmeticam alio, vel alio modo multiplicari, scilicet

$$\begin{array}{l} x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \\ \;0 \quad\;\; 1 \quad\;\; 2 \quad\;\; 3 \\ \hline 0 - 5x^2 + 16x - 12 = 0 \end{array}$$

Hujus

Hujus enim & propositæ æquationis communis divisor est ut antea, $x - 2 = 0$

III. Similiter si secundum terminum auferre libeat, ita progressio Arithmetica disponitur.

$$\begin{array}{l} x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \\ 1 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \\ \hline x^3 \quad * \quad -8x + 8 = 0 \end{array}$$

Cujus quidem æquationis & datæ communis divisor semper reperitur $x - 2 = 0$.

IV. Si æquatio data tres habeat radices æquales, bis multiplicentur ejus termini per terminos progressionis Arithmeticæ, ut supra: si habeat quatuor radices æquales, ter multiplicentur: si quinque radices æquales, quater &c. Sit æquatio, quæ tres radices æquales habere supponitur.

$$\begin{array}{l} x^4 \; * \; -6x^2 + 8x - 3 = 0 \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \hline 0 \; * \; -12x^2 + 24x - 12 = 0 \\ \qquad 0 \quad 1 \quad 2 \\ \hline \qquad 0 + 24x - 24 = 0 \end{array}$$

Communis divisor est $x - 1$; per quem si ter dividatur æquatio proposita, quotus dabit tres radices æquales $+1$, $+1$, $+1$. Quarta vero (cum in æquatione secundus terminus desit) erit -3 *per Prop.* 1. *Cap.* 6. *num.* 4.

Demonstr. Per progressionem Arithmeticam æquatio data in aliam convertitur, quæ continet easdem radices æquales una minus. Nam ut superiora exempla docent, ea potissi-

tissimum progressio assumitur, quæ vel incipit a zero, vel desint in zerum, ut æquatio, quæ inde producitur, fiat uno gradu inferior, ideoque radicum numerus decrescit, fitque una radice minor. Per iteratas autem ejusmodi multiplicationes ad eam æquationem devenitur, in qua una tantum æqualium radicum continetur: proinde si hujus & propositæ æquationis communis divisor inveniatur, ille æqualium radicum unam dabit.

COROLL. I. *Manifestum est, hac ratione tolli posse ex æquatione data terminum quem quis voluerit, collocando sub eo zerum, ut allata exempla docent.*

COROLL. II. *Si communis divisor nullo modo reperiri possit, tunc infertur radices æquales esse irrationales, quæ non sunt hujus loci.*

SCHOL. I. *Communis divisor non est necesse, ut inveniatur inter æquationem datam & æquationem ex Arithmetica progressione productam, ut in primo exemplo factum est: sed commodius aliquando sumitur inter duas æquationes productas, ut inter* $3x^2 - 10x + 8 = 0$, *&* $-5x^2 + 16x - 12 = 0$, *quæ habentur in eodem primo exemplo, quarum divisor communis est* $x - 2$, *ut prius.*

SCHOL. II. *Pulcherrimum hoc problema, quod* Johanni Huddenio ( ) *Belgæ acerrimi ingenii viro debemus, quanti sit usus in Geometria sublimiori pro ducendis Tangentibus, pro determinandis quæstionibus de Maximis, & Minimis aliisque pluribus, satis intelliget, qui ad eam gradum faciet.*

(a) De reductione æquat. Reg. x. in fine Geom. Cartes. pag. m. 433.

CAPUT VIII.

De Æquationibus Quadraticis.

Si æquationum radices inveniri nequeant per ea, quæ in Capite præcedenti explicavimus, signum erit, radices irrationales, vel etiam imaginarias in illis contineri, aliaque via resolutionem illarum esse ineundam. Proinde regulas peculiares pro æquationibus ejusmodi trademus, a *quadraticis* incipiendo; quæ si fractionibus, aut radicalibus implicentur, prius ab illis expediri debent per ea, quæ docuimus *in Prop.* 2. 8. *&* 9. *Cap.* 6.

PROPOSITIO I.

Æquationes secundi gradus, seu quadraticas resolvere.

I. Si æquatio *quadratica* sit pura, ut $x^2 = ab$, extracta hinc inde secunda radice, habetur valor quæsitus, nempe $x = \sqrt{ab}$. Eadem ratione $x^2 = 14400$, extracta pariter radice, erit $x = \sqrt{14400}$; & si per communem Arithmeticam actu radix extrahatur, habetur $x = 120$.

II. Si æquatio fuerit affecta, ut $x^2 + ax = b^2$, regula hæc erit: ex dimidio coefficientis secundi termini, nempe ex $\frac{1}{2}a$, fiat quadratum $\frac{1}{4}aa$, quod utrique membro æquationis addatur, ut potentia fiat completa, unde radix secunda extrahi possit. Ecce exemplum. Sit æquatio data

x^2

$$x^2 + ax = bb$$
Adde $\quad \frac{1}{4}a^2 \quad \frac{1}{4}a^2$

$$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = bb + \frac{1}{4}a^2$$

Extr. rad. $\quad x + \frac{1}{2}a = \sqrt{bb + \frac{1}{4}a^2}$

$$x = \sqrt{bb + \frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$$

Sit aliud exemplum, $x^2 - 3ax = b^2$. Fiat ex dimidio coefficientis $\frac{3}{2}a$ quadratum $\frac{9}{4}a^2$, quod utrinque addatur, erit

$$x^2 - 3ax = b^2$$
Adde $\quad \frac{9}{4}a^2 \quad \frac{9}{4}a^2$

$$x^2 - 3ax + \frac{9}{4}a^2 = b^2 + \frac{9}{4}a^2$$

Extr. rad. $\quad x - \frac{3}{2}a = \sqrt{b^2 + \frac{9}{4}a^2}$

$$x = \sqrt{b^2 + \frac{9}{4}a^2} + \frac{3}{2}a$$

Demonstratio ex ipsa potentiæ secundæ genesi emanat. Nam in binomio ad potentiam secundam elevato quantitas secundi termini est duplum facti ex utraque binomiæ radicis parte. Cum igitur habeatur (in primo exemplo) x pars una, erit $\frac{1}{2}a$ pars altera radicis, ex qua potentia secunda completur.

COROLL. *Hinc patet, in ejusmodi æquationibus radicem secundam obtineri, accipiendo summam, vel differentiam radicum primi & tertii termini potentiæ completæ. Accipitur summa, cum omnes termini sunt positivi, ut* $x + \frac{1}{2}a$ *in primo exemplo; differentia vero, si secundus terminus sit negativus, ut* $x - \frac{3}{2}a$ *in secundo exemplo.*

SCHOL. I. *Æquationes affectæ secundi gradus resolvuntur etiam facillime, sublato secundo termino* per Prop. 5. Cap. 6. *Sit enim eadem æquatio resolvenda* $x^2 - 3ax = b^2$, *seu* $x^2 - 3ax - b^2 = 0$. *Ut tollatur secundus terminus, fiat* $x = y + \frac{3}{2}a$, *erit*

$$\left.\begin{array}{r} x^2 \\ -3ax \\ -b^2 \end{array}\right| \begin{array}{r} = y^2 + 3ay + \frac{9}{4}a^2 \\ -3ay - \frac{9}{2}a^2 \\ -b^2 \\ \hline y^2 \quad * \quad -\frac{9}{4}a^2 - b^2 = 0 \end{array}$$

Est ergo $y^2 = \frac{9}{4}a^2 + b^2$, *& extracta radice*, $y = \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + b^2}$. *Ponatur hic valor loco* y *in æquatione* $x = y + \frac{3}{2}a$, *erit*

$x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + b^2}$ *omnino ut prius*.

SCHOL. II. *Omnis æquatio quadratica duas habet radices, alteram affirmativam, negativam alteram. Nam quadratum quodlibet, v.g.* 25, *tam oritur ex* 5×5, *quam ex* -5×-5. *Proinde si fuerit æquatio* $x^2 = ab$, *valor erit* $x = \pm\sqrt{ab}$, *hoc est valor ipsius* x *tam habetur per radicem positivam* $+\sqrt{ab}$, *quam per negativam* $-\sqrt{ab}$. *Sic etiam in exemplo superiori* Schol. I. *radix positiva est*

$x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + b^2}$, *negativa vero* $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + b^2}$. *Quod adeo certum est, ut si alterutra ponatur in æquatione data loco* x, *termini omnes evanescunt, proinde utraque est vera radix* per num. 5. Prop. 1. Cap. 6. *Brevitatis autem gratia utrunque signum apponunt, unum sub alio* $\pm$. *Quod pro iis, quæ dicenda sunt, notetur*.

PRO-

PROPOSITIO II.

Æquationes secundi gradus alia ratione expenduntur.

Sit æquatio generalis $x^2 + 2px + q = 0$, repræsentans omnes æquationes secundi gradus, ita ut $+2p$ repræsentet coefficientem secundi termini cum suo signo, & $+q$ ultimum terminum cum suo pariter signo, ut explicavimus *in Coroll.* 1. *Prop.* 2. *Cap.* 6. Summa radicum ejusdem æquationis sit $= 2f$, earumque differentia $= 2g$, erit radix major $f+g$, minor vero $f-g$ *per Theor.* 3. *Prop.* 3. *Cap.* 5. Cumque utraque sit unus valor ipsius incognitæ x, erit $x = f+g$, & $x = f-g$. Fiant igitur (mutatis signis) æquationes simplices $x - f - g = 0$, & $x - f + g = 0$, ex quarum multiplicatione oritur æquatio

$$\begin{array}{l} x^2 - 2fx + ff = 0 \\ \qquad\qquad\quad - gg \end{array}$$

Quæ ex suppositione æqualitatis radicum, erit æqualis æquationi $x^2 + 2px + q = 0$. Fiat ergo terminorum comparatio (neglecto primo utriusque termino) erit $-2f = 2p$, unde habetur $f = -p$, & $ff = p^2$. Item $ff - gg = q$, seu $gg = ff - q$, & ponendo p^2 loco ff, erit $gg = p^2 - q$, extractaque radice, habetur $g = \sqrt{p^2 - q}$.

Determinato ita valore ipsarum f & g, erit radix major $f+g = -p + \sqrt{p^2 - q}$, minor vero $f-g = -p - \sqrt{p^2 - q}$.

Co-

COROLL. *Hinc habentur quatuor illæ formulæ generales pro æquatione quacunque secundi gradus resolvenda, de quibus in sequenti Propositione.*

PROPOSITIO III.

Æquationes secundi gradus per formulas generales resolvere.

I. Æquationes secundi gradus affectæ quatuor modis ratione signorum variari possunt, ideoque quatuor formulis generalibus exprimi solent, in quibus $2p$ semper denotat quantitatem cognitam secundi termini, q vero quantitatem cognitam tertii, videlicet

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x^2 - 2px - q = 0 \\ \text{II.} & x^2 + 2px - q = 0 \\ \text{III.} & x^2 + 2px + q = 0 \\ \text{IV.} & x^2 - 2px + q = 0 \end{array}$$

II. Reperto valore incognitæ x *per Prop. antec.* habentur sequentes formulæ generales cum duplici signo $\pm$ ob duplicem radicem affirmativam, & negativam ex dictis *in Schol. 2. Prop. 1. hujus.*

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x = p \pm \sqrt{p^2 + q} \\ \text{II.} & x = -p \pm \sqrt{p^2 + q} \\ \text{III.} & x = -p \pm \sqrt{p^2 - q} \\ \text{IV.} & x = p \pm \sqrt{p^2 - q} \end{array}$$

1. Pro-

1. Propoſita ſit igitur æquatio ſecundi gradus reſolvenda $x^2 - 10x - 6 = 0$.

Ex ſignis ſtatim apparet, hanc æquationem pertinere ad primam formulam, $x^2 - 2px - q = 0$. Comparentur mutuo termini, erit $2p = 10$, & $p = 5$. Item $q = 6$. Eſt autem radix primæ formulæ generalis $x = p + \sqrt{p^2 + q}$, in qua ſi ponantur loco p & q earum valores, erit $x = 5 + \sqrt{25 + 6}$, ſeu $x = 5 + \sqrt{31}$. Altera ejuſdem formulæ radix $x = p - \sqrt{p^2 + q}$, hoc eſt $x = 5 - \sqrt{31}$.

2. Sit æquatio $x^2 + 1x - 2 = 0$, quæ, ut ex ſignis liquet, pertinet ad ſecundam formulam $x^2 + 2px - q = 0$. Fiat comparatio terminorum, erit $2p = 1$, unde $p = \frac{1}{2}$, & $q = 2$. Radix formulæ ſecundæ eſt $x = -p + \sqrt{p^2 + q}$, ideoque poſitis loco p & q earum valoribus, habetur $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$, ſeu $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} = 1$. Altera radix ejuſdem formulæ eſt $x = -p - \sqrt{p^2 + q}$, proinde $x = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}} = -2$.

3. Sit æquatio $x^2 + 4x + 6 = 0$ pertinens ad tertiam formulam, ut ex ſignis patet, $x^2 + 2px + q = 0$. Comparando terminos utriuſque, erit $2p = 4$ & $p = 2$, item $q = 6$. Radix autem generalis ejuſdem formulæ eſt $x = -p + \sqrt{p^2 - p}$, ſubſtitutis in ea valoribus p & q, erit $= -2 + \sqrt{4 - 6}$, ſeu $x = -2 + \sqrt{-2}$. Altera radix erit $x = -2 - \sqrt{-2}$. Hinc apparet propoſitæ æquationis radices eſſe imaginarias.

4. Sit

4. Sit æquatio $x^2 - 6x + 8 = 0$, quæ ad quartam formulam spectat propter signorum similitudinem, nempe ad $x^2 - 2px + q = 0$. Facta terminorum comparatione, erit $2p = 6$, & $p = 3$, item $q = 8$, quibus valoribus p & q positis in formula radicis generalis $x = p + \sqrt{p^2 - q}$, erit una radix $x = 3 + \sqrt{9 - 8}$, seu $x = 3 + \sqrt{1}$, altera vero $x = 3 - \sqrt{1}$; vel una $x = 4$, altera $x = 2$: ambæ sunt positivæ.

COROLL. *Contingit non semel, ut tertiæ & quartæ formulæ radices sint imaginariæ, cum scilicet* q *major est, quam* p^2, *ut supra in tertio exemplo, quod solutioni problematum nihil obstat. Idem quoque accidit, si in æquatione desit secundus terminus, tertius autem sit cum signo* $+$, *ut* $x^2 + q = 0$. *Nam una radix erit* $x = -\sqrt{-q}$, *altera* $x = +\sqrt{-q}$, *proinde ambæ imaginariæ. Ceterum ubi ultimus æquationis terminus signo negativo afficitur, radices semper sunt reales, ut ex prima, & secunda formula apparet.*

PROPOSITIO IV.

Æquationes derivativas secundi gradus resolvere.

I. ÆQuationes tribus tantum terminis constantes, quarum primus ad quatuor, ad sex, & ad altiores quoque dimensiones ascendit, & in quibus exponentes terminorum incognitorum habent inter se & zero eandem differentiam, hoc est sunt in eadem proportione Arithmetica, ut 4, 2, 0, vel 6, 3, 0 &c. dicuntur æquationes *deriva-*

rivativæ secundi gradus, & resolvuntur similiter ac ipsæmet secundi gradus æquationes, ut quæ afferuntur exempla docent.

Sit æquatio $x^4 - 6x^2 - 4 = 0$. Pone $x^2 = y$ erit $x^4 = y^2$, unde oritur $y^2 - 6y - 4 = 0$, quæ si resolvatur per primam formulam generalem *Prop. antec.* habetur $y = 3 + \sqrt{13}$.

Quia vero posita fuit $x^2 = y$, erit $x = \sqrt{y}$, adeoque $x = \sqrt{3 + \sqrt{13}}$.

II. Sit æquatio $x^6 + 4x^3 - 12 = 0$, pone $x^3 = y$, erit $x^6 = y^2$, unde oritur $y^2 + 4y - 12 = 0$. Quæ si resolvatur per formulas generales *Prop. ant.*, cum ratione signorum pertineat ad secundam formulam, erit valor ipsius $y = -2 + \sqrt{16}$, seu $y = 2$. At vero cum posita fuerit $x^3 = y$, erit $x = \sqrt[3]{y}$, hoc est $x = \sqrt[3]{2}$.

Hæc omnia ex solutione problematum, quæ sequuntur, clarius elucescent.

PROBL. I.

Invenire quadratum, cui si addatur ejus radix, fiat æquale unitati.

Sit quæsiti quadrati latus $= x$, erit per conditionem problematis æquatio

$$xx + x = 1$$

per Prop. 1. *adde* $\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}$

$$xx + x + \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{4}$$

Extr. radix $x + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$

$x = \sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}$

$xx = \frac{5}{4} - \sqrt{\frac{5}{4}} + \frac{1}{4}$

adde $x = + \sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}$

$xx + x = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

PROBL. II.

Duos numeros invenire, quorum summa a summa quadratorum, quæ ex ipsis fiunt, subtracta, relinquit 78. Addita vero ad eorum factum, efficit 39.

Sit numerorum quæsitorum summa $= 2x$, eorumque differentia $= 2y$, erit major $= x + y$, minor $= x - y$ *per Cor. Theor. 3. Cap. 5.* Sit vero $b = 39$, erunt $2b = 78$.

Si fiant quadrata, & ex eorum summa $2x^2 + 2y^2$ auferatur summa numerorum $2x$, erit per primam problematis conditionem æquatio

$2x^2 + 2y^2 - 2x = 2b$

Div. per 2) $x^2 + y^2 - x = b$

Quod si ad factum eorundem numerorum $x^2 - y^2$ addatur eorum summa $2x$, oritur ex secunda problematis conditione æquatio altera

$x^2 - y^2 + 2x = b$

Prop. 2. Cap. 5. $x^2 + y^2 - x = b$

$2x^2 + 1x = 2b$

Div. per 2) $x^2 + \frac{1}{2}x - b = 0$

Hæc

Hæc autem finalis æquatio pertinet ad secundam formulam generalem *Propos.* 3. *hujus*, ex qua habetur radix $x = -p + \sqrt{p^2 + q} = -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + 39} = -\frac{1}{4} + \frac{25}{4} = 6$. Nam $p = \frac{1}{4}$, & $q = b = 39$.

Valor autem ipsius y innotescit ex prima æquatione $x^2 + y^2 - x = b$, ex qua $y^2 = b - x^2 + x$; proinde substituto valore modo invento pro x & x^2, habetur $y^2 = 39 - 36 + 6 = 9$, unde $y = 3$ & $x + y = 9$, $x - y = 3$.

SCHOL. Clavius [a] *putavit hoc problema, quod ipse ænigma vocat, difficillimum; pro cujus solutione ipsemet Geometriæ opem implorat, contenditque illud sine Geometria vix, aut nullo modo solvi posse. Quod quidem de Algebra* Numerosa, *quæ id temporis obtinebat, fortasse verum. Ceterum quam facile nunc* per Speciosam *a summis viris* Vieta, & Cartesio *inductam hujusmodi problema sine Geometria resolvatur, jam vidimus. Atque hinc apparet quanta sit hujus supra illam utilitas & præstantia.*

PROBL. III.

Invenire tres numeros in proportione Arithmetica, quorum primus si multiplicetur per 1, secundus per 2 & tertius per 3, producta sint æqualia numero dato 30. Quadrata vero quæ ex ipsis numeris fiunt, æqualia sint numero 66.

Pone numerum datum $30 = a$, $66 = b$, & tres numeri quæsiti vocentur A, B, C. Sit primus quæsitorum $A = x$, tertius $C = y$, eorum summa $x + y$ si bifariam

(a) V. Algeb. Cap. XXXI. Ænigma 58. p. m. 343.

fariam dividatur, dabit *per Coroll. Theor.* 1. *Cap.* 5. numerum secundum $B = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$.

Sunt autem ex prima problematis conditione

$$\begin{array}{ll} A & x \times 1 = x \\ B & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \times 2 = x + y \\ C & y \times 3 = 3y \\ \hline & A + B + C = 2x + 4y = a \end{array}$$

Proinde
$$2x = a - 4y$$
$$x = \tfrac{1}{2}a - 2y \ (= A)$$
$$\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{4}a - y$$

Positoque hoc valore in quantitate $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ $(= B)$ erit $B = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}y$.

Sunt ergo tres numeri quæsiti

$$A = \tfrac{1}{2}a - 2y$$
$$B = \tfrac{1}{4}a - \tfrac{1}{2}y$$
$$C = y \ (\text{nam } 2B - A = C = y)$$

Eorumque quadrata erunt

$$\begin{array}{l} AA = 4y^2 - 2ay + \frac{1}{4}aa \\ BB = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}ay + \frac{1}{16}aa \\ CC = yy \\ \hline \end{array}$$

Summa $= 5\frac{1}{4}y^2 - 2\frac{1}{4}ay + \frac{5}{16}aa = b$

$$21y^2 - 9ay + 1\tfrac{1}{4}aa = 4b$$

Divid. per 21 $\quad y^2 - \frac{3}{7}ay + \frac{5}{84}aa = \frac{4}{21}b$

Et

Et fubftitutis loco a & b numeris datis, erit

$$y^2 - 12\tfrac{6}{7}y + 53\tfrac{4}{7} = 12\tfrac{4}{7}$$

$$\textit{Subtr.} \qquad 53\tfrac{4}{7} \qquad 53\tfrac{4}{7}$$

$$y^2 - 12\tfrac{6}{7}y = -41$$

Hinc *per Prop.* 1. *vel* 3. *hujus* invenietur $y = 7$, proinde innotefcent reliqui

$$A = \tfrac{1}{2}a - 2y = 1$$
$$B = \tfrac{1}{4}a - \tfrac{1}{2}y = 4$$
$$C \qquad = y = 7$$

PROBL. IV.

Datum numerum 26 in tres partes continuo proportionales Geometrice dividere, ut quadratum mediæ æquetur duplo facti mediæ & minimæ, & præterea fextuplo ejufdem minimæ.

Pone numerum datum dividendum $26 = a$, & fit trium proportionalium minima $= x$; media $= y$, erit maxima $= a - x - y$. Cum autem factum maximæ & minimæ fit æquale quadrato mediæ *per Theor.* 5. *Cap.* 5. erit

$$ax - xx - xy = y^2$$

Sed ex conditione problematis $y^2 = 2xy + 6x$, ergo

$$ax - xx - xy = 2xy + 6x$$

Divid. per x $\qquad a - x - y = 2y + 6$

Hinc

Hinc habentur tres partes proportionales

$$\begin{array}{r} 2y+6 \\ +y \\ +x \\ \hline \end{array}$$

Summa $3y+x+6=a$

$\therefore$ $3y=a-x-6$

Divid. per 3 $y=\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}x-2$

Ponatur brevitatis caufa loco a numerus datus 26, erit

$$y=-\tfrac{1}{3}x+6\tfrac{2}{3}$$
$$y^2=\tfrac{1}{9}x^2-4\tfrac{4}{9}x+44\tfrac{4}{9}$$

Cui æqualis fupponitur $2yx+6x$. Subftituto proinde in hac quantitate pro $2y$ ejus valore, oritur æquatio

$$-\tfrac{2}{3}x^2+19\tfrac{1}{3}x=\tfrac{1}{9}x^2-4\tfrac{4}{9}x+44\tfrac{4}{9}$$

Subtr. $\frac{1}{9}x^2-4\frac{4}{9}x \quad \frac{1}{9}x^2-4\frac{4}{9}x$

$$-\tfrac{7}{9}x^2+23\tfrac{7}{9}x=44\tfrac{4}{9}$$

Mult. per 9

$$-7x^2+214x=400$$

Divid. per 7

$$x^2-30\tfrac{4}{7}x=-57\tfrac{1}{7}$$

Hinc *per Propof.* 1. *vel* 3. *hujus* innotefcet $x=2$, y $(=-\frac{1}{3}x+6\frac{2}{3})=6$, & pars maxima $=18$. Quæ fimul conficiunt numerum 26.

PROBL.

PROBL. V.

Datis duobus numeris, duos alios invenire, inter quos datorum alter sit Geometrice, alter Arithmetice proportionalis.

Sit ex datis numeris alter $= a$, alter $= b$: quæsitorum primus $= x$, secundus $= y$, erit per primam problematis conditionem

$$x \,.\, a :: a \,.\, y$$

Theor. 4. *Cap.* 5. $\quad xy = aa$, & $x = \frac{aa}{y}$

Similiter per secundam problematis conditionem erit

$$x \,.\, b \,\cdot\!\!\cdot\,\, b \,.\, y$$

Theor. 1. *Cap. cit.* $\quad x + y = 2b$, hinc $x = 2b - y$

Et (*ob* $x = \frac{aa}{y}$) $\quad \frac{aa}{y} = 2b - y$

Multiplic. per $y \quad aa = 2by - yy$

$$yy - 2by = -aa$$

Prop. 1. *hujus* $\quad$ *adde* $\quad b^2 \quad b^2$

$$yy - 2by + b^2 = b^2 - aa$$

Extr. rad. $\quad y - b = \sqrt{b^2 - a^2}$

$$y = b + \sqrt{b^2 - a^2}$$

$$x\ (= 2b - y) = b - \sqrt{b^2 - a^2}$$

Sit $a = 3$, $b = 5$, erit $y = 5 + \sqrt{25 - 9} = 5 + 4 = 9$, & $x = 5$

& $x = 5 - \sqrt{25 - 9} = 5 - 4 = 1$. Inventi sunt ergo 1 & 9, inter quos datorum alter 3 mediat Geometrice, alter 5 Arithmetice.

Sit $a = 4$, $b = 5$, erit $y = 8$, $x = 2$, habentur ergo 2 & 8, inter quos unum datorum 4 est medius Geometrice proportionalis, alter 5 est medius Arithmetice.

PROBL. VI.

Duo mercatores societatem ineunt. Primus summam nescio quam posuit, & mansit in societate menses 12. Alter posuit aureos 30, quos in societate reliquit mensibus 17. Invenerunt lucrum esse aureorum 18 $\frac{3}{4}$. Primus pro pecunia in sortem collata una cum lucro habuit aureos 26. Quæritur quantum ipsemet primus posuerit.

Esto summa a primo posita $= x$, tempus, seu menses $12 = a$: summa alterius $30 = b$, menses $17 = c$; erit summa primi cum suo tempore $= ax$, summa alterius cum tempore $= bc$, & utriusque summa $= ax + bc$: lucrum ex societate factum sit $= d$. Sors autem primi cum lucro est $26 = f$. Ut innotescat lucrum primi, fiat

Cor. 1. *Theor.* 4. *Cap.* 4. $\quad ax + bc \cdot d :: ax \cdot \frac{adx}{ax + bc}$

Cui si addatur pecunia ab ipso in sortem collata, nempe x, habetur æquatio

$$x + \frac{adx}{ax + bc} = f$$

Et

Et ad tollendas fractiones multiplicando per $ax+bc$, habetur

$$axx+bcx+adx=afx+bcf$$

Sch. Prop. 2. *Cap.* 6.

$$axx+bcx=bcf \\ +adx \\ -afx$$

Positis autem numeris determinatis loco a, b, c & f, erit

$$12x^2+423x=13260$$

Divid. per 12

$$x^2+35\tfrac{1}{4}x=1105$$

Hinc *per Prop.* 1. *vel* 3. *hujus* invenitur $x=20$ pro pecunia a mercatore primo posita.

SCHOL. *Hoc problema fuit Florentiæ publice propositum an.* 1653. *Cumque diu insolutum remansisset, ubi ad notitiam* Caroli Rinaldini *illud venit, fuit ab eodem statim resolutum, ut ipse testatur in Arte Analytica Mathematum pag.* 526. *Expedita tamen magis hæc nostra solutio est.*

Problemata Geometrica.

PROBL. I.

Datis in triangulo rectangulo perpendiculari AB, *& aggregato hypothenusæ ac basis* AC+BC, *hypothenusam & reliquum latus invenire.* Fig. 1.

Sit perpendicularis $AB=a$, aggregatum hypothenusæ ac basis $AC+BC=b$, & $AC=x$, erit $BC=b-x$, proinde *per* 47. *l.* 1. *Eucl.*

$$x^2 = b^2 - 2bx + x^2 + a^2$$
$$b^2 - 2bx + a^2$$
$$2bx = a^2 + b^2$$
$$x = \frac{a^2 + b^2}{2b} = AC$$

$$BC\ (= b - x) = \frac{b^2 - a^2}{2b}$$

SCHOL. *Ex æquatione ultima problematum erui possunt regulæ Arithmeticæ, quarum aliquas ad cetcrarum exemplum hic subiicimus.*

Regula Arithm. 1. Summa quadratorum perpendicularis (a^2) & aggregati hypothenusæ & basis (b^2) dividatur per duplum ejus aggregati ($2b$) quotus dabit hypothenusam AC.

Regula Arithm. 2. Ex quadrato aggregati hypothenusæ & basis (b^2) subtrahe quadratum perpendicularis (a^2), & residuum ($b^2 - a^2$) divide per duplum ejusdem aggregati ($2b$) quotus dabit basim BC.

PROBL. II.

Datis in triangulo rectangulo basi BC *& aggregato hypothenusæ & perpendicularis* AC + AB, *hypothenusam & perpendicularem invenire.* Fig. 1.

Sit basis $BC = a$, aggregatum hypothenusæ & perpendicularis $AC + AB = b$, hypothenusa vero $AC = x$, erit

erit $AB = b - x$, & per 47. l. 1. *Eucl.* habetur in terminis analyticis

$$x^2 = b^2 - 2bx + x^2 + a^2$$

$$b^2 - 2bx + a^2$$

$$2bx = a^2 + b^2$$

$$x = \frac{b^2 + a^2}{2b} = AC$$

$$\text{Et } AB\ (= b - x) = \frac{b^2 - a^2}{2b}$$

Regula Arithm. Summa quadratorum basis & aggregati hypothenusæ & perpendicularis ($a^2 + b^2$) divisa per duplum ejusdem aggregati ($2b$) dat hypothenusam AC. Differentia vero eorundem quadratorum ($b^2 - a^2$) divisa per duplum ejusdem aggregati ($2b$) dat perpendicularem AB.

COROLL. *Tam ex primo quam ex secundo problemate habetur regula inveniendi in numeris infinita triangula rectangula, quorum latera per numeros integros, & rationales exprimantur. Habentur enim tria latera* $BC = a$, $AC = \frac{a^2 + b^2}{2b}$, & $AB = \frac{b^2 - a^2}{2b}$, *quibus ad eandem denominationem redactis* (*multiplicando* $a \times 2b$), & *deleto communi denominatore, erunt* $BC = 2ab$, $AC = a^2 + b^2$, & $AB = b^2 - a^2$.

Sumantur itaque ad arbitrium pro a & b duo quicunque numeri. Sit $a = 1$, $b = 2$, erit $2ab = 4$, $a^2 + b^2 = 5$, $b^2 - a^2 = 3$. Latera ergo trianguli rectanguli quæsita sunt 3, 4, 5.

 Sit

Sit $a = 5$, $b = 7$, erit $2ab = 70$, $a^2 + b^2 = 25 + 49 = 74$, & $b^2 - a^2 = 49 - 25 = 24$. Sunt ergo latera quæsita, 24, 70, 74, & sic de aliis infinitis.

PROBL. III.

In triangulo quocunque ABC *datis uno angulo* BAC, *latere* AC *adjacente*, *& reliquorum laterum* AB + BC *summa*, *latus* AB *invenire*. Fig. 2.

EX puncto C ad latus quæsitum AB demittatur perpendicularis CD. In triangulo rectangulo ADC ob datum angulum DAC & hypothenusam AC, dantur etiam latera AD, & CD *per Probl.* 2. *Trigonom. Tacquet*. Ex data itaque laterum $AB + BC$ summa auferatur latus AD jam notum, relinquetur summa $BD + BC$ pariter nota. Quæritur latus BD.

Sit laterum $BD + BC$ summa data $= c$, latus $CD = b$, latus quæsitum $BD = x$, erit $BC = c - x$, & $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2$ *per Prop.* 47. *l.* 1. *Eucl.* hoc est

$$x^2 = c^2 - 2cx + x^2 - b^2$$

$$2cx = c^2 - b^2$$

$$x = \frac{c^2 - b^2}{2c} = BD$$

Regula Arithm. Inventis per Trigonometriam lateribus AD & CD, si quadratum lateris CD (b^2) aufe-

ras

ras a quadrato aggregati laterum $BD + BC$ (c^2), & residuum ($c^2 - b^2$) dividas per duplum ejusdem aggregati laterum ($2c$) dabitur latus BD, quod additum lateri jam invento AD, dat latus quæsitum AB.

SCHOL. *Hinc patet, Trigonometriam quoque opem suam Algebræ conferre. Nam sine illa longiori sane calculo opus fuisset. Hoc problemate* Guil. Whiston ([a]) *utitur ad calculum Planetarum Geometricum supputandum. At prolixiori circuitu hanc ipsam æquationem assequitur.*

PROBL. IV.

Datis tribus cujuscunque trianguli lateribus, superficiem invenire. Fig. 3.

PRoducatur, si opus sit, latus BC in D, in quod cadit a vertice A perpendicularis AD. Ponatur autem $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $AD = x$, $CD = y$, erit $BD = c + y$.

Jam habetur *per Prop.* 47. *l.* 1. *Eucl.*

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 \qquad \Big| \qquad \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2$$

$$x^2 = b^2 - y^2 \qquad \Big| \qquad x^2 = a^2 - c^2 - 2cy - y^2$$

Proinde $$b^2 - y^2 = a^2 - c^2 - 2cy - y^2$$

$$2cy = a^2 - b^2 - c^2$$

$$y = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}$$

Hinc

(a) Prælect. Astronom. Lem. VI. pag. 272. Londini 1707.

Hinc $y^2 = \frac{a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + b^4 + c^4}{4c^2}$

Substituto valore y^2 in superiori prima æquatione, & extracta deinde radice, oritur

$$AD = \sqrt{\left(b^2 - \frac{a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + b^4 + c^4}{4c^2}\right)}$$

hoc est $AD = \sqrt{\left(\frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4c^2}\right)}$

Quod si altitudo AD multiplicetur per dimidium basis BC ($= \frac{1}{2}c$) hoc est per $\frac{1}{4}cc$ (ob signum radicale *ex Prop.* 4. *Cap.* 4.) erit superficies quæsita

$$\sqrt{\left(\tfrac{1}{8}a^2b^2 + \tfrac{1}{8}a^2c^2 + \tfrac{1}{8}b^2c^2 - \tfrac{1}{16}a^4 - \tfrac{1}{16}b^4 - \tfrac{1}{16}c^4\right)}$$

Regula Arithmetica ad Geometriam practicam valde utilis, quam auctores communiter tradunt, est hujusmodi: ex laterum semisumma subtrahantur singula latera, ut habeantur tres differentiæ, quæ inter se multiplicentur, earumque productum ducatur in ipsam semisummam laterum: nam hujus producti radix quadrata erit area trianguli quæsita.

Vel sic: primo multiplicetur semisumma laterum per differentiam unius lateris, & fiat productum A. Secundo multiplicentur inter se differentiæ reliquorum duorum laterum, & fiat productum B. Tertio duo illa producta A & B invicem multiplicentur, & extrahatur inde radix quadrata, quæ dabit superficiem trianguli quæsitam.

Semi-

Semisumma later.	$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$
Differ. unius lat.	$-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$
Productum A	$-\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}c^2$
Differ. duor. lat.	$-\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}a$
	$+\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}a$
Productum B	$-\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}a^2$

Ductis invicem productis $A \times B$, oritur omnino ut supra

$$\frac{1}{8}a^2b^2 + \frac{1}{8}b^2c^2 + \frac{1}{8}a^2c^2 - \frac{1}{16}a^4 - \frac{1}{16}b^4 - \frac{1}{16}c^4$$

Cujus radix quadrata dat quæsitam trianguli superficiem.

Sit $a = 15$, $b = 13$, $c = 14$, erit summa laterum $= 42$ & semisumma $= 21$. Differentiæ inter hanc & latera sunt 8, 7, 6, quarum productum $= 336$, si multiplicetur per semisummam 21 dat 7056. Cujus radix quadrata 84 dat trianguli superficiem quæsitam.

SCHOL. I. *Verum quo pacto ex superiori æquatione* $\sqrt{(\frac{1}{8}a^2b^2 + \frac{1}{8}a^2c^2 \text{ \&c.})}$ *regula hæc Arithmetica eruatur, non illico apparet. Sed advertatur, tres quantitates* a, b, c, *quæ invicem simul multiplicantur, & nusquam ternæ in producto reperiuntur, necessario elidi debere per signa negativa & alternatim opposita; tertium autem productum oriri ex omnibus illis positive sumptis, scilicet*

$$\frac{-a+b+c}{2} \times \frac{a-b+c}{2} \times \frac{a+b-c}{2} \times \frac{a+b+c}{2}$$

Ex harum enim multiplicatione habetur productum supra inven-

inventum. Cujus coefficientes fracti oriuntur ex eo, quod singulæ summæ divisæ sint per $\frac{1}{2}$, *ut evidens est.*

Schol. II. *Porro egregii hujus problematis, teste* Adriano Metio (a), *auctor est* Theon Alexandrinus, *magnus Geometra & Astronomus*. Dn. de la Hire (b) *tanti fecit, ut illud Academiæ regiæ Parisiensi faciliori solutione concinnatum proposuerit.*

PROBL. V.

In dato semicirculo ducta perpendiculari DE *ad diametrum* AC, *ducere ab extremitate diametri rectam* AB, *ita ut pars intercepta* FB *æqualis sit semidiametro* AO, *vel* CO. Fig. 4.

Esto factum, ductisque *BG* parallela perpendiculari *DE*, & recta *BC*, sit diameter $AC = a$, $AE = b$, $AB = x$, erit $AF = x - \frac{1}{2}a$, cum supponatur $FB = AO$, vel $CO = \frac{1}{2}a$.

Ob triangula *BAG* & *EAF* similia erit $AF . AE :: AB . AG$, & in terminis analyticis

$$x - \tfrac{1}{2}a . b :: x . \frac{bx}{x - \frac{1}{2}a} \left(= \frac{2bx}{2x - a}\right) = AG$$

Similiter ob triangula *ABC* & *BAG* similia erit *per Cor. Prop.* 8. *l.* 6. *Eucl. ex Tacquet.*

CA

(a) Geometr. Pract. par. 2. cap. 3. num. 4. (b) Memoires de l'Acad. des sciences an. 1700. & Acta Erudit. Lipsiæ an. 1704.

$$CA \,.\, AB :: AB \,.\, AG$$

$$a \,.\, x :: x \,.\, \frac{2bx}{2x-a}$$

$$x^2 = \frac{2abx}{2x-a}$$

Multipl. per $2x-a$

$$2x^3 - ax^2 = 2abx$$

Divid. per $2x$

$$x^2 - \tfrac{1}{2}ax = ab$$

Propos. 1. *adde* $\tfrac{1}{16}a^2 \quad \tfrac{1}{16}a^2$

$$x^2 - \tfrac{1}{2}ax + \tfrac{1}{16}a^2 = \tfrac{1}{16}a^2 + ab$$

Extr. rad.

$$x - \tfrac{1}{4}a = \sqrt{\tfrac{1}{16}a^2 + ab}$$

$$x = \tfrac{1}{4}a + \sqrt{\tfrac{1}{16}a^2 + ab}$$

Innotescit ergo quantitas chordæ quæsitæ AB, quæ ducenda est a puncto A, ut imperatur. Etenim si ponatur $a = 4$ & $b = 1$, erit $x \left(= \tfrac{1}{4}a + \sqrt{\tfrac{1}{16}a^2 + ab}\right) = 1 + \sqrt{5}$, ideoque ipsa chorda $AB = 1 + \sqrt{5}$.

Aliter (*Fig.* 5.) Completo circulo, producatur DE in F, & sit diameter $AB = a$, $AE = b$, $DE = c$, $CG = AM$, vel $BM = \tfrac{1}{2}a$, $AC = x$, erit $AG = x - \tfrac{1}{2}a$.

Cum DF secta sit bifariam in E *per Prop.* 3. *l.* 3. *Eucl.*, & non bifariam in G, erit $\overline{DE}^2 = DG \times GF + \overline{GE}^2$ *per Prop.* 5. *l.* 2. sed $DG \times GF = AG \times GC$ *per Prop.* 35. *l.* 3. & $\overline{GE}^2 = \overline{AG}^2 - \overline{AE}^2$ *per Propos.* 47. *l.* 1. ergo $\overline{DE}^2 = AG \times GC + \overline{AG}^2 - \overline{AE}^2$, hoc est in terminis analyticis

$$c^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax - b^2$$

$$x^2 - \frac{1}{2}ax = b^2 + c^2$$

Quæ quidem æquatio resolvitur *per Prop.* 1. *hujus*, & habetur $x = \frac{1}{4}a + \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + b^2 + c^2}$, quæ a superiori non differt. Nam posita $AB\ (a) = 4$, & $AE\ (b) = 1$, erit $EB = 3$: proinde $DE\ (c) = \sqrt{3}$, cum sit media proportionalis inter AE & EB *per Cor. Prop.* 13. *l.* 6. *Eucl.* Erit ergo $c^2 = 3$, adeoque $\sqrt{\frac{1}{16}a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{5}$, & $x = 1 + \sqrt{5}$; atque hinc chorda $AC = 1 + \sqrt{5}$, ut prius.

PROBL. VI.

Datis in circuli diametro AB *duobus punctis* D, *&* E *a centro* C *æquidistantibus, invenire in peripheria punctum* F, *a quo ductæ* FD, FC, *&* FE *sint in continua proportione Geometrica.* Fig. 6.

Esto F punctum quæsitum, a quo demittatur perpendicularis FG. Sit $DC = CE = a$, $AD = EB = b$, $FC = CA$, vel $CB = r$, $DG = x$, erit $AG = b - x$, & $GB = 2a + b + x$.

$$AG \times GB = 2ab + b^2 - 2ax - x^2 = \overline{FG}^2$$

$$\text{adde } \overline{GD}^2 = x^2$$

$$\text{Prop. 47. l. 1. } \overline{FD}^2 = 2ab + b^2 - 2ax$$

At

At $GE = 2a + x$, & $\overline{GE}^2 = 4a^2 + 4ax + x^2$

adde $\overline{FG}^2 = 2ab + b^2 - 2ax - x^2$

Propos. cit. $\overline{FE}^2 = 4a^2 + 2ab + b^2 + 2ax$

Sunt autem ex conditione problematis FG, FC, & FD in continua proportione Geometrica, ergo etiam eorum quadrata *per Theor. 6. Cap. 5.*, nempe $\overline{FE}^2$, $\overline{FC}^2$, $\overline{FD}^2$, & in terminis analyticis

$$4a^4 + 2ab + b^2 + 2ax . r^2 :: r^2 . 2ba + b^2 - 2ax$$

Fiant porro facilioris calculi gratia quantitates notæ $4a^4 + 2ab + b^2 = m$, & $2ba + b^2 = n$, erit

$$m + 2ax . r^2 :: r^2 . n - 2ax$$

Th. 4. Cap. 5. $mn + 2anx - 2amx - 4a^2x^2 = r^4$

Sch. Prop. 1. Cap 5. $4a^2x^2 + 2amx - 2anx = mn - r^4$

Div. per $4a^2$ $x^2 + \frac{m-n}{2a} \times x = \frac{mn - r^4}{4a^2}$.

Fiat $\frac{m-n}{2a} = 2p$, & $\frac{mn-r^4}{4a^2} = q$, erit *per Cor. Prop. 2. Cap. 6.* æquatio $x^2 + 2px - q = 0$

Quæ quidem *per Prop. 3. hujus* facile resolvitur, eritque nota quantitas DG, seu punctum G, ex quo elevata perpendiculari GF, obtinetur in peripheria punctum quæsitum.

SCHOL. *Problemata Geometrica fere omnia constructionem Geometricam admittunt. Nos hoc loco Arithmeticas tantum regulas deduxisse contenti Geometricam constructionem ad caput ultimum referre statuimus, ne tyrones rerum multitudine & varietate perturbentur.*

CAPUT IX.

De Æquationibus Cubicis.

QUO calculus facilior evadat, ſupponitur jam ſecundus terminus ab æquatione ſublatus: item fractiones, & termini radicales, ut in *Prop.* 2. 8. & 9. *Cap.* 6. docuimus.

Omnes æquationes Cubicæ, ſublato ſecundo termino, ad aliquam ſequentium formularum reducuntur

$$x^3 - px + q = 0$$
$$x^3 - px - q = 0$$
$$x^3 + px - q = 0$$

PROPOSITIO I.

Explicatur æquationum Cubicarum geneſis.

I. SIt æquatio generalis $x^3 - px + q = 0$, repræſentans omnes æquationes cubicas ſecundo termino carentes, quæ, ut ex ſignis apparet, duas habent radices poſitivas, & tertiam negativam duabus illis poſitivis æqualem, alias ſecundus terminus non evaneſceret *per num.* 4. *Prop.* 1. *Cap.* 6. Sint

Sint igitur duæ radices positivæ $f-g$, & $f+g$, erit earum summa $=2f$, earumque differentia $=-2g$, & radix negativa $=-2f$. Fiant (mutatis signis) æquationes simplices $x-f+g=0$, $x-f-g=0$, & $x+2f=0$, ex quarum facto oritur æquatio tertii gradus indeterminata *A*, tres radices reales continens, duas quidem positivas, & tertiam negativam earum summæ æqualem, scilicet:

$$A \quad \begin{array}{l} x^3-3ffx+2f^3=0 \\ \quad -ggx-2ggf \end{array}$$

Comparentur hujus termini cum terminis æquationis generalis assumptæ $x^3-px+q=0$, cui ex hypothesi æquatur, fiunt duæ æquationes.

1.ª $3ff+gg=p$, hinc $ff+\frac{1}{3}gg=\frac{1}{3}p$

2.ª $2f^3-2ggf=q$, hinc $f^3-ggf=\frac{1}{2}q$

II. Sit æquatio generalis $x^3-px-q=0$, repræsentans omnes æquationes cubicas, in quibus (ut signa indicant) sunt duæ radices negativæ, & una positiva earum summæ æqualis, alias secundus terminus non evanuisset *per num.* 4. *Prop.* 1. *Cap.* 6.

Sint igitur radices negativæ $-f+g$, & $-f-g$: earum summa $=-2f$ dat radicem positivam illis æqualem, earumque differentia erit $=-2g$. Fiant (mutatis signis) æquationes simplices $x+f-g=0$, $x+f+g=0$, & $x-2f=0$, ex quarum facto oritur æquatio indeterminata *B*, continens tres radices reales, duas negativas, & tertiam positivam, scilicet

$$B \quad \begin{array}{l} x^3-3ffx-2f^3=0 \\ \quad -ggx+2ggf \end{array}$$

Cujus

Cujus terminis comparatis cum terminis æquationis generalis assumptæ $x^3 - px - q = 0$, cui æqualis supponitur, fiunt duæ æquationes.

$1.^a \; -3ff - gg = -p$, hinc $ff + \frac{1}{3}gg = \frac{1}{3}p$
$2.^a \; -2f^3 + 2ggf = -q$, hinc $-f^3 + ggf = -\frac{1}{2}q$

Ex utraque æquatione A & B, in quibus f supponitur major, quam g (alias $f - g$ non esset radix positiva, nec $-f + g$ esset radix negativa, ut fuit suppositum) nonnulla inferuntur, ex quorum notitia maxime pendet æquationum cubicarum resolutio, scilicet

1. Si duæ radices (sive positivæ, sive negativæ illæ sint) æquales existant; tunc cubus ex triente quantitatis cognitæ tertii termini est æqualis quadrato ultimi termini, hoc est $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$.

Nam in hoc casu in duabus æquationibus simplicibus $x - f + g = 0$ & $x - f - g = 0$, earum differentia seu quantitas $2g$ fit nulla, hoc est $2g = 0$, proinde in æquatione A (idem fit in æquatione B) evanescit quantitas $-ggx + 2ggf$, & remanet $x^3 - 3ffx - 2f^3 = 0$. Comparentur hi termini residui cum terminis æquationis generalis assumptæ $x^3 - px + q = 0$, oriuntur duæ æquationes; prima $-3ff = -p$, seu $ff = \frac{1}{3}p$, secunda $-2f^3 = +q$, seu $f^3 = -\frac{1}{2}q$. Harum prima elevetur ad cubum, & ad quadratum altera: erunt $f^6 = \frac{1}{27}p^3$ & $f^6 = \frac{1}{4}qq$, proinde $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$.

2. Si cubus idem ex triente quantitatis cognitæ tertii termini major fuerit quadrato ex semisse ultimi termini, hoc est si $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, tunc tres radices reales erunt inæquales.

Nam

Nam comparatis terminis æquationis A cum terminis formulæ generalis $x^3 - px + q = 0$, habentur æquationes illæ duæ, prima $ff + \frac{1}{3}gg = \frac{1}{3}p$, ſecunda $f^3 - ggf = \frac{1}{2}q$, & elevando primam ad cubum, oritur

$$f^6 + ggf^4 + \frac{1}{3}g^4ff + \frac{1}{27}g^6 = \frac{1}{27}p^3$$

Elevando autem ſecundam ad quadratum, habetur

$$f^6 - 2ggf^4 + g^4ff = \frac{1}{4}qq$$

Si hæc ex illa auferatur, erit reſiduum

$$3ggf^4 - \frac{2}{3}g^4ff + \frac{1}{27}g^6 = \frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq$$

Jam vero quia ex dictis f major eſt quam g, erit quoque $3ggf^4$ major quam $\frac{2}{3}g^4ff$ (nam diviſa utraque per $ggff$, quotus $3ff$ major erit quam $\frac{2}{3}gg$) ideoque cum in ſuperiori æquatione $3ggf^4 - \frac{2}{3}g^4ff + \frac{1}{27}g^6 = \frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq$ unum membrum ſit poſitivum, erit quoque alterum membrum, nempe $\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq$, ergo $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$.

3. Si idem cubus fuerit minor quadrato ex ſemiſſe ultimi termini, hoc eſt $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$, tunc æquatio duas radices imaginarias continebit. Nam ſi omnes reales eſſent, fieret ex dictis $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$, vel $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$.

Hæc omnia vera exiſtunt, quacunque alia formula generali aſſumpta, ſi pari ratione procedatur.

COROLL. *Ubi non adſunt radices imaginariæ, ſed omnes ſunt reales, tertius terminus ſemper apparet cum ſigno* —, *nempe* — p. *Si duæ radices ſint poſitivæ, & rationales, ultimus terminus erit cum ſigno* + q. *Si negativæ, & rationales, erit* — q. *Contra vero ſi duæ radices irrationales ſint, ultimus terminus erit* ± q.

PRO-

PROPOSITIO II.

In æquationibus cubicis an duæ radices ſint æquales, & quænam ſint, explorare.

I. Sit data æquatio $x^3 - 12x + 16 = 0$. Patet *per Propoſ.* 1. *ejuſque Coroll.* haberi tres radices reales, duas quidem poſitivas & tertiam negativam; quæritur an duæ illæ poſitivæ ſint æquales. Fiat comparatio terminorum cum terminis formulæ generalis $x^3 - px + q = 0$, erit

$$p = 12 \quad\Big|\quad q = 16$$
$$\tfrac{1}{27}p^3 = 64 \quad\Big|\quad \tfrac{1}{4}qq = 64$$

Habentur ergo *per Prop. præc.* duæ radices æquales.

II. Ut una ex illis inveniatur, dividatur triplum ultimi termini per duplum coefficientis tertii termini, quotus dabit radicem quæſitam, hoc eſt $\frac{3q}{2p} = \frac{48}{24} = 2$. Tertia itaque radix erit -4, earum ſummæ æqualis *per num.* 4. *Prop.* 1. *Cap.* 6.

Demonſtr. Nam ex *Prop. præc.* cum radices ſunt æquales, tunc in æquationibus ſimplicibus $x - f + g = 0$ & $x - f - g = 0$ fit $g = 0$; hinc facta ex illis multiplicatione, & comparatis terminis æquationis, quæ inde oritur, cum terminis formulæ generalis, ut in *Prop. cit.* factum eſt, æquatio illa $3ff + gg = p$, fiet $3ff = p$; atque hinc $ff = \frac{1}{3}p$. Similiter $2f^3 - 2ggf = q$, fit $2f^3 = q$, unde oritur $f^3 = \frac{1}{2}q$. Dividatur jam hæc æquatio per illam, hoc eſt primum

mum membrum per primum & secundum per secundum membrum, erit $f^3 : ff = \frac{1}{2}q : \frac{1}{3}p$, unde $f = \frac{3q}{2p}$, quæ quidem æquatio allatam regulam nobis exhibet.

PROPOSITIO III.

In æquationibus Cubicis an radix aliqua sit rationalis, & quænam sit, explorare.

I. Sit æquatio generalis $x^3 - px + q = 0$, quæ tres radices reales habet, duas quidem positivas, & tertiam duabus illis æqualem negativam, *per Cor. Prop.* 1. *hujus*. Quæritur primo, an radix illa negativa, alterutra positiva major, sit rationalis.

Subtrahatur quantitas p ex quadrato proxime majori, & per residuum dividatur q. Si quotus fuerit radix ejusdem quadrati assumpti, erit ipse idem radix rationalis quæsita. Si vero successive nullum reperiatur quadratum majus p, quod hunc præstet effectum, signum est, radicem illam esse irrationalem.

Sit exemplum $x^3 - 39x + 70 = 0$ (facta comparatione cum terminis formulæ generalis) erit $p = 39$, $q = 70$. Quadratum proxime majus quam p est $= 49$, ex quo subtracto p, erit $49 - 39 = 10$: per hoc residuum dividatur $q = 70$, quotus 7 æqualis radici quadrati assumpti dat radicem rationalem negativam quæsitam.

Explorandum deinde sit, an aliqua ex radicibus positivis sit rationalis. Sumatur quadratum proxime minus quam

p, quod subtrahatur ex ipso p, & per residuum dividatur q. Si quotus fuerit radix ejusdem quadrati assumpti, ille dabit radicem rationalem quæsitam. Si vero nullum successive quadratum reperiatur minus ipso p, quod hunc præstet effectum, signum est, radices illas esse irrationales.

Sit eadem æquatio, quæ prius, $x^3 - 39x + 70 = 0$, cum sit $p = 39$, $q = 70$, quadratum proxime minus p, erit $= 36$, quo subtracto ex p, fit $39 - 36 = 3$, & dividendo per hoc residuum quantitatem $q = 70$, quotus $= 23\frac{1}{3}$ non est radix assumpti quadrati.

Sumatur quadratum adhuc minus, nempe 25, quo subtracto ex p, erit $39 - 25 = 14$, per quod residuum dividendo $q = 70$, habetur quotus $= 5$, æqualis radici quadrati assumpti, qui dat unam ex radicibus positivis rationalem, nempe 5.

II. Sit æquatio generalis $x^3 - px - q = 0$, quam *ex Propos.* 1. *hujus*, *ejusque Coroll.* liquet habere tres radices reales, duas quidem negativas & tertiam positivam illis æqualem, proinde alterutra negativa majorem. Quæritur, an radix illa positiva sit rationalis. Regula est eadem.

Sit exemplum $x^3 - 13x - 12 = 0$, erit $p = 13$, & $q = 12$. Quadratum proxime majus quam p est $= 16$, ex quo subtrahatur p, erit $16 - 13 = 3$, & dividendo per hoc residuum $q = 12$, habetur quotus, qui est æqualis lateri quadrati assumpti, proinde radix rationalis quæsita $= 4$.

Quæritur deinde, an aliqua ex radicibus negativis sit rationalis. Sumatur quadratum proxime minus quam p, hoc est 9, quod ex ipso subtrahe, erit $13 - 9 = 4$, per quod residuum diviso $q = 12$, habetur quotus æqualis lateri

teri quadrati assumpti, & radix rationalis quæsita, nempe -3.

Demonstr. Positis duabus radicibus positivis (ut *in Propos.* 1. *hujus*) $f+g$ & $f-g$, earum summa $2f$ dat radicem negativam illis æqualem, ejusque quadratum $=4ff$, ex quo subtrahatur $3ff+gg$ $(=p)$, residuum est $4ff-3ff-gg$, hoc est $ff-gg$; per quod residuum si dividatur $2f^3-2ggf$ $(=q)$ remanet $2f$, radix scilicet quadrati $4ff$ & æquationis; unde patet ratio regulæ pro prima parte.

Pro altera parte fiat ex aliqua radice, sive positiva $f-g$, sive negativa $-f+g$ quadratum $ff-2gf+gg$, quod subtrahatur ex $3ff+gg$ $(=p)$, residuum erit $2ff+2gf$, per quod dividendo $2f^3-2ggf$ $(=q)$, quotus dat $f-g$ radicem scilicet quadrati & æquationis; unde evidens est ratio secundæ partis problematis.

COROLL. I. *Tum ex praxi, tum ex demonstratione patet, ex quadrato assumpto subtrahi coefficientem* p, *ubi maxima radicum inquiritur: contra vero quadratum assumptum subtrahi debere ex coefficiente* p, *ubi radix una ex minoribus quæritur. Quod si in neutro casu prodeat ultimi termini* q *divisor talis, ex cujus divisione habeatur quotus, qui sit assumpti quadrati latus, signum est, radices illas quæsitas esse irrationales, ut* ex Propos. sequenti *clarius apparebit.*

COROLL. II. *Inventa una ex radicibus rationalibus, sive illa positiva, sive negativa sit, dividitur per illam æquatio, quæ sit secundi gradus, & aliæ duæ radices facile innotescunt* per Prop. 1. & 3. Cap. 8.

SCHOL. I. *Si radix inventa, quæ sit* $=a$, *ponatur*

 dua-

duarum reliquarum summa, erit illa coefficiens secundi termini in æquatione quadratica, quæ reliquas duas radices continet; & si per illam dividatur ultimus æquationis datæ terminus q, *erit* $\frac{q}{a}$ *productum duarum ipsarum radicum in æquatione quadratica contentarum, nempe* $x^2 - ax + \frac{q}{a} = 0$, *si radices illæ positivæ sint; vel* $x^2 + ax + \frac{q}{a} = 0$, *si negativæ; adeoque in primo casu radix una positiva erit* $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a})}$, *altera* $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a})}$. *In secundo casu una negativa* $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a})}$, *altera* $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a})}$. *Sic in superiori æquatione* $x^3 - 13x - 12 = 0$, *cum inventa fuerit radix positiva* $= 4$, *quæ reliquis duabus negativis æqualis esse debet, si dicatur* a, *erit* $\frac{q}{a} = \frac{12}{4} = 3$, *proinde ex allata formula erit una radix negativa* $x = -2 - \sqrt{4-3} = -3$, *altera* $x = -2 + \sqrt{4-3} = -1$.

SCHOL. II. *Ubi duplex signum occurrit* $\pm$ *vel* $\mp$; *hæc est regula: in primo casu sumitur signum positivum, in secundo negativum. Plerunque tamen* $\pm$ *significat quantitatem illam tum positive, tum negative posse usurpari, ut* in Schol. 2. Prop. 1. Cap. 8. *dictum est*.

PRO-

PROPOSITIO IV.

Æquationes cubicas, quæ duas radices imaginarias & realem continent, expedire.

Æquationes cubicas ſecundo termino carentes tunc duas radices imaginarias continere certum eſt:

1. Cum tertius terminus p afficitur quidem ſigno —, ſed $\frac{1}{27}p^3$ minus eſt quam $\frac{1}{4}qq$, *ut in Prop.* 1. *hujus* dictum eſt, & tunc æquatio generalis erit $x^3 - px \pm q = 0$.

2. Cum tertius terminus ſigno + afficitur, in quo caſu formula generalis eſt $x^3 + px \pm q = 0$.

3. Demum cum æquatio ſecundo & tertio termino caret, (quæ *æquatio pura* tertii gradus dicitur) ut $x^3 \pm q = 0$, tunc autem radix realis ſemper erit $x = \sqrt[3]{\pm q}$.

In ejuſmodi autem æquationibus habetur $-q$, ubi radices imaginariæ negativæ ſunt: habetur $+q$, ubi radices imaginariæ ſunt poſitivæ; adeoque in formulis generalibus ponitur utrunque ſignum $\pm q$.

In his reſolvendis quæritur primum radix realis, quæ erit vel poſitiva, vel negativa, ſemper æqualis ſummæ duarum radicum imaginariarum, alias ſecundus terminus tolli non potuiſſet. Ipſa vero radix realis poteſt eſſe rationalis & irrationalis. An ſit rationalis ita detegitur.

I. Sumatur quadratum minus, vel majus quam p, cui addatur $\pm p$; hoc eſt ſi in data æquatione ſit $-p$, ſumatur $-p$, ſi vero ſit $+p$, ſumatur $+p$; & per hoc reſiduum, vel ſummam dividatur q. Si diviſio dat quo-

tum,

tum, qui sit radix quadrati assumpti, habetur radix rationalis quæsita, ut in primo & secundo exemplo sequenti; alias est irrationalis, ut in tertio exemplo.

Data sit æquatio $x^3 - 1x + 6 = 0$, quæ comparari debet cum formula generali $x^3 - px + q = 0$. Cum autem $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}$ minor sit quam $\frac{1}{4}qq = 9$, jam manifestum est, duas radices imaginarias, & quidem positivas ob $+q$ in ea delitescere. Sumatur quadratum 4, cumque habeatur $-p = -1$, per quadratum $4 - 1 = 3$ dividatur $q = 6$, quotus, qui est latus quadrati assumpti, dat radicem realem rationalem negativam -2 *per num.* 4. *Propos.* 1. *Cap.* 6.

Radices imaginariæ habentur *per Prop.* 1. *&* 3. *Cap.* 8., nempe $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$. Nam data æquatio si dividatur per radicem rationalem inventam, deprimitur ad secundum gradum, ut patet.

II. Data sit æquatio $x^3 + 27x - 28 = 0$, quæ convenit cum formula generali $x^3 + px - q = 0$, & signum $+p$ indicat duas radices imaginarias in ea contineri: quæritur radix rationalis ejusdem. Sumatur quadratum 1, cui addatur $p = 27$, & per hanc summam $1 + 27 = 28$ dividatur $q = 28$: quotus 1, cum sit latus quadrati assumpti, dat radicem rationalem quæsitam.

Radices vero imaginariæ (depressa æquatione ad secundum gradum) habentur *per Propos.* 1. *&* 3. *Cap.* 8. $-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - 28}$, & $-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 28}$, negativæ quidem, ut æquationis datæ signa indicant, proinde radix realis necessario positiva est.

III. Sit æquatio $x^3 - 6x - 16 = 0$, quæ convenit

cum

cum formula generali $x^3 - px - q = 0$, & quia $\frac{1}{27}p^3 = 8$ minus est quam $\frac{1}{4}qq = 64$, signum est, haberi duas radices imaginarias. Videndum, an radix realis sit rationalis. Sumatur quadratum 4, cui addatur $-p = -6$, & per summam $4 - 6 = -2$ diviso $-q = -16$, habetur $+8$, quod quidem non est latus quadrati assumpti. Sumatur aliud successive quadratum, nempe 9, cui addatur $-p = -6$, & per summam hanc $9 - 6 = 3$ dividatur $-q = -16$. Sed hoc cum fieri non possit exacte & sine residuo, sumatur successive aliud quadratum majus, nempe 16, quod additum ad $-p = -6$, summa fit 10, per quam pariter non est divisibilis sine residuo quantitas $q = 16$. Et cum aliud & aliud quadratum frustra ad hunc effectum assumatur, signum est, radicem realem esse irrationalem, alia sane methodo inferius inveniendam *per Prop.* 6.

Demonstr. fere eadem est ac praec. Propos. Nam si supponantur duae radices imaginariae negativae $-f + \sqrt{-3gg}$, & $-f - \sqrt{-3gg}$, ex quibus fiant aequationes simplices $x + f - \sqrt{-3gg} = 0$ & $x + f + \sqrt{-3gg} = 0$, earum summa $2f$ dabit radicem realem positivam, quae ob secundum terminum, quo aequatio caret, illis debet esse aequalis. Habetur itaque $x - 2f = 0$. Multiplicentur tres hujusmodi aequationis, oritur aequatio

$$\begin{array}{l} x^3 - 3ffx - 2f^3 = 0 \\ \quad + 3ggx - 6ggf \end{array}$$

Et facta comparatione cum terminis formulae generalis $x^3 \pm px - q = 0$, erit

$$-3ff + 3gg = \pm p, \ \& \ -2f^3 - 6ggf = -q$$

Quod

Quod si radices imaginariæ positivæ fuerint, scilicet $f+\sqrt{-3gg}$, & $f-\sqrt{-3gg}$, tunc radix realis earum summæ æqualis ob secundum terminum, qui deest, necessario erit negativa, nempe $-2f$, factaque, ut supra, multiplicatione trium æquationum simplicium, oritur

$$x^3 - 3ffx + 2f^3 = 0$$
$$+ 3ggx + 6ggf$$

Comparatis hujus terminis cum terminis formulæ generalis $x^3 \pm px + q = 0$, habetur

$$-3ff + 3gg = \pm p, \ \& \ 2f^3 + 6ggf = q$$

Proinde si $4ff$ (quadrato radicis realis $\pm 2f$) addatur $-3ff + 3gg = \pm p$, summa erit $4ff - 3ff + 3gg$, hoc est $ff + 3gg$, per quam si dividatur $-2f^3 - 6ggf = -q$ in primo casu, vel $2f^3 + 6ggf = q$ in secundo casu, quotus dabit radicem realem quæsitam $\pm 2f$.

SCHOL. *In æquationibus puris tertii gradus* $x^3 \pm q = 0$ *præter radicem realem* $x = \sqrt[3]{q}$, *vel* $x = \sqrt[3]{-q}$, *dantur quoque aliæ duæ radices, quæ ex dictis* in Prop. *imaginariæ sunt. Hæ autem sic inveniuntur. Dividatur* $x^3 - q = 0$ *per ejus radicem realem inventam* $x - \sqrt[3]{q} = 0$; *quotus* $x^2 + x\sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{q^2}$ *erit æquatio secundi gradus, quæ duas radices imaginarias continebit. Fiat brevitatis gratia* $q = 8$, *erit* $x^3 - 8 = 0$, *ejusque radix realis* $x - 2 = 0$, *per quam dividendo* $x^3 - 8 = 0$, *habetur æquatio secundi gradus* $x^2 + 2x + 4 = 0$; *cujus radices, ut ex signis patet, imaginariæ sunt, & quidem negativæ,*

nempe

nempe $-1+\sqrt{-3}$, & $-1-\sqrt{-3}$. *Similiter divisa æquatione* $x^3+8=0$ *per ejus radicem* $x+2=0$, *invenitur* $x^2-2x+4=0$, *quæ dat duas radices imaginarias positivas* $1+\sqrt{-3}$, $1-\sqrt{-3}$. *Sic etiam si fiat* $q=1$, *seu* $x^3-1=0$, *erunt tres ipsius unitatis radices cubicæ* 1, $-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}}$, & $-\frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}}$.

PROPOSITIO V.

Æquationes Cubicas, in quibus una saltem radix est rationalis, brevius expedire.

I. Sit æquatio data $x^3+12x=427$, cujus una radix rationalis inquiritur.

Quia incognitæ cubus minor est cubo cognitæ, hoc est $x^3<427$, nam $x^3=427-12x$; sumatur radix cubica ipsius 427 proxime minor, nempe 7, ejusque cubus 343 subtrahatur ex ipsa quantitate cognita 427, subtracto ex altera parte incognitæ cubo x^3. Ex residuo $12x=84$ habetur $x=7$, radix æquationis, assumptæ radici cubicæ æqualis, nempe

	$x^3+12x=427$
Subtr.	$x^3 \qquad\quad 343$
	$+12x=84$
Divid. per 12	$x=7$

II. Sit æquatio proposita $x^3-12x=1584$: cum sit $x^3>1584$, nam $x^3=1584+12x$; sumatur radix cubica proxime major ipsius 1584, nempe 12, ejusque cubus

1728 subtrahatur ex ipso 1584, subtracto pariter incognitæ cubo x^3, habetur radix quæsita 12 assumptæ radici æqualis

$$\begin{array}{ll} & x^3 - 12x = 1584 \\ \textit{Subtr.} & x^3 \qquad\quad 1728 \\ \hline & -12x = -144 \\ & x = 12 \end{array}$$

III. Sit æquatio $x^3 + 27x = 28$, ut in præced. Prop. facile cognoscitur cubum x^3 minorem esse cubo ipsius 28: nam $x^3 = 28 - 27x$. Radix cubica proxime minor ejusdem 28 est 3, ejusque cubus 27, qui subductus a 28 relinquit 1: proinde fieret $x = \frac{1}{27}$, qui non est valor quæsitus, ut patet. Sumpta radice cubica adhuc minori, nempe 2, factaque cubi subtractione, idem sequitur inconveniens: haberetur enim $x = \frac{20}{27}$. Sumatur itaque pro radice cubica ipsius 28 unitas, ejusque cubo 1 subtracto ex eodem 28, habetur $x = 1$ radix quæsita.

$$\begin{array}{ll} & x^3 + 27x = 28 \\ \textit{Subtr.} & x^3 \qquad\qquad 1 \\ \hline \textit{Div. per } 27 & +27x = 27 \\ & x = \frac{27}{27} = 1 \end{array}$$

Coroll. *Patet ratio, cur in hoc tertio exemplo radix cubica proxime minor ad rem non fuerit; sed multo minor, imo omnium minima apte fuerit assumpta. Nam cubus incognitæ* x^3 *minimam habet rationem ad quantitatem* 28. *Adduntur enim illi* 27x, *ut habeatur æquatio. Hoc pro similibus casibus advertatur.*

Schol.

SCHOL. *Æquationes cubicæ, de quibus hactenus egimus, in quibus scilicet una saltem radix rationalis inventa fuit, poterant certe resolvi per ea, quæ diximus in* Cap. 7., *sed quis non videt hanc viam esse breviorem, cum opus non sit plures ultimi termini divisores tentare, pluresque divisiones peragere? sentiant aliud qui volunt.*

PROPOSITIO VI.

Æquationes Cubicas, quæ duas imaginarias, & realem irrationalem continent, expedire.

I. Sit æquatio $x^3 - px - q = 0$, in qua duas radices imaginarias & realem irrationalem contineri jam constet *per Prop.* 4. *&* 5. *hujus*, inveniri debet ipsa radix irrationalis.

1. Subtrahatur $\frac{1}{27}p^3$ ex $\frac{1}{4}qq$, & ex residuo extrahatur radix quadrata, cui addatur $\frac{1}{2}q$ dimidium ultimi termini. Et ex hac summa extracta radice cubica, habetur prima pars radicis realis irrationalis quæsitæ

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}}$$

2. Dividatur quantitas p per triplum primæ partis radicis jam inventæ, quotus dabit alteram radicis partem priori addendam, scilicet

$$\frac{p}{3\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}}}$$

Formula proinde generalis quæsitæ radicis est hujusmodi

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}} + \frac{p}{3\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}}}$$

Sit exemplum æquatio $x^3 - 6x - 16 = 0$, in qua per *Prop. præc.* radix realis est irrationalis: facta terminorum comparatione cum formula generali, erit $p = 6$, & $q = 16$, proinde $\frac{1}{27}p^3 = 8$, & $\frac{1}{4}qq = 64$, hinc $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3 = 64 - 8 = 56$.

Hujus residui radix quadrata, nempe $\sqrt{56}$, addatur ad $\frac{1}{2}q = 8$, & ex hac summa extrahatur radix cubica, erit prima pars radicis irrationalis quæsitæ $\sqrt[3]{8 + \sqrt{56}}$. Et dividendo $p = 6$ per triplum hujus primæ partis, obtinetur altera pars radicis, videlicet

$$\frac{6}{3\sqrt[3]{8 + \sqrt{56}}} = \frac{2}{\sqrt[3]{8 + \sqrt{56}}}.$$ Tota itaque radix erit

$$x = \sqrt[3]{8 + \sqrt{56}} + \frac{2}{\sqrt[3]{8 + \sqrt{56}}}$$

II. Si æquatio data sit $x^3 + px - q = 0$, in qua tertius terminus est cum signo $+$, eadem est regula, si duo excipias. Primo $\frac{1}{27}p^3$ & $\frac{1}{4}qq$ addi debent, non subtrahi. Secundo radicis inventæ partes non sunt addendæ, sed secunda ex prima subtrahitur, ideoque formula generalis erit

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}}$$

Sit

Sit exemplum $x^3 + 3x - 26 = 0$, facta comparatione cum superiori formula generali, erit $p = 3$ & $q = 26$, proinde $\frac{1}{27}p^3 = 1$, & $\frac{1}{4}qq = 169$. Hinc $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3 = 170$, & $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3} = \sqrt{170}$, quæ radix addatur ad $\frac{1}{2}q = 13$, & ex summa extrahatur radix cubica, erit $\sqrt[3]{13 + \sqrt{170}}$ prima pars radicis, & dividendo per hujus triplum quantitatem $p = 3$, habetur secunda pars subtrahenda ex prima; proinde tota radix erit

$$x = \sqrt[3]{13 + \sqrt{170}} - \frac{1}{\sqrt[3]{13 + \sqrt{170}}}$$

Demonstr. Sit ut *in Prop.* 4. æquatio, duas radices imaginarias negativas, & unam positivam illis æqualem continens

$$\begin{aligned} x^3 - 3ffx - 2f^3 &= 0 \\ + 3ggx - 6ggf & \end{aligned}$$

factaque comparatione cum terminis formulæ primæ generalis $x^3 - px - q = 0$, erit $-3ff + 3gg = -p$, seu $3ff - 3gg = p$, unde $ff - gg = \frac{1}{3}p$, & utriusque membri cubus

$$A \quad f^6 - 3ggf^4 + 3g^4ff - g^6 = \frac{1}{27}p^3$$

Similiter quia $-2f^3 - 6ggf = -q$, erit $2f^3 + 6ggf = q$, & $f^3 + 3ggf = \frac{1}{2}q$, & quadratum utriusque membri

$$B \quad f^6 + 6ggf^4 + 9g^4ff = \frac{1}{4}qq$$

Jam si ex æquatione B subtrahatur æquatio A, residuum erit

$$9ggf^4 + 6g^4ff + g^6 = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$$

Extra-

Extractaque radice quadrata, habetur

$$3gff+g^3=\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}$$

Cui addatur superior æquatio $f^3+3ggf=\frac{1}{2}q$, fit summa

$$f^3+3ggf+3gff+g^3=\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}$$

Ex qua si radix cubica extrahatur, prodit prima pars radicis

$$f+g=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}$$

Dividendo autem superiorem æquationem $ff-gg=\frac{1}{3}p$ per hanc ultimam, hoc est primum membrum per primum, & secundum per secundum, oritur

$$f-g=\frac{\tfrac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}}$$

Quæ duæ æquationes simul junctæ dant realem radicem quæsitam $2f$, nempe

$$2f(=x)=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}+\frac{\tfrac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}}$$

Demonstr. Quoad secundam formulam $x^3+px-q=0$. Sit eadem æquatio, in qua tamen supponitur g major f,

$$\begin{aligned}x^3-3ffx-2f^3&=0\\+3ggx-6ggf&\end{aligned}$$

Facta comparatione cum terminis formulæ generalis, erit $3gg-3ff=p$, unde $gg-ff=\frac{1}{3}p$, & utriusque membri cubus

$$M \quad g^6-3ffg^4+3f^4gg-f^6=\tfrac{1}{27}p^3$$

Simi-

Similiter habetur $-2f^3-6ggf=-q$, seu $f^3+3ggf=\frac{1}{2}q$ & utriusque membri quadratum

$$N \quad f^6+6f^4gg+9ffg^4=\tfrac{1}{4}qq$$

Addantur duæ æquationes M & N, erit summa

$$g^6+6ffg^4+9f^4gg=\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3$$

Ex qua si extrahatur radix quadrata, prodit

$$g^3+3ffg=\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}$$

Huic adde æquationem superiorem $f^3+3ggf=\frac{1}{2}q$, erit

$$g^3+3ffg+3ggf+f^3=\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}$$

Atque hinc radice tertia extracta, oritur prima pars radicis quæsitæ, nempe

$$g+f=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}$$

Ut secundam partem obtineas, divide per hanc primam partem æquationem superiorem $gg-ff=\frac{1}{3}p$, scilicet

$$\frac{gg-ff}{g+f}=\frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}} \quad \text{erit}$$

$$g-f=\frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}}$$

Quod si hæc ex priori parte radicis subducatur, erit radix quæsita

$$2f(=x)=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}-\frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}}$$

Co-

Coroll. *Si in alterutra formula haberetur* $+ q$, *eadem manet demonstratio, eo solum discrimine, quod in eo casu radices imaginariæ essent positivæ, & radix realis illis æqualis negativa* $- 2f$.

Schol. I. *Per radicem irrationalem inventam dividi debet æquatio, & ad secundum gradum deprimi, ut radices imaginariæ innotescant. Quo id commodius fiat, substituatur loco ejusdem radicis irrationalis quantitas rationalis. Sit v.g. æquationis* $x^3 - px - q = 0$ *radix irrationalis inventa* $\sqrt{3}$, *fiat* $\sqrt{3} = m$, *& dividendo per* $x - m$ *ipsam æquationem, oritur æquatio secundi gradus* $x^2 + mx + m^2 - p = 0$, *quæ duas radices imaginarias continet, facile inveniendas* per Prop. 1. & 3. Cap. 8. *Residuum autem illud* $m^3 - mp - q$, *quod ex hac divisione habetur, negligitur tanquam zero, seu nihil. Hoc recte fieri hinc patet, quod si substituas loco ipsius* m *incognitam* x, *cujus valorem repræsentat, termini æquationis datæ restituuntur.*

Schol. II. *Hactenus dicta sufficerent ad plenam æquationum cubicarum notitiam. Sed æquum non est* Cardani *regulas prorsus omittere, quas* Cartesius, Newtonus, Wolfius *& fere omnes recentiores celebrarunt. Earum inventionem* Scipioni Ferreo *Bononiensi* Cardanus *tribuit. Audiunt vulgo* Cardani *regulæ, quod fortasse ipse omnium primus publicaverit. Miror, quod eruditi viri* Fontanellus ([a]), *&* Lamy ([b]) *easdem* Varignono *tanquam auctori attribuerint.*

PRO-

(a) Histoire de l'Acad. Royale des Scien. 1699. (b) Elemens de Mathematique a Paris 1704.

PROPOSITIO VII.

Formulas generales, seu regulas Cardani dictas invenire.

I. Sit æquatio generalis $x^3 - px - q = 0$. Fiat $x = f + g$ (fieri debet $f - g$, ubi habetur $+ px$) erit

$$x^3 = f^3 + 3ffg + 3ggf + g^3$$

Est autem $3ffg + 3ggf = 3fg \times \overline{f+g}$, & ex hypothesi $x = f + g$, proinde $3fg \times \overline{f+g} = 3fgx$, adeoque $3fgx = 3ffg + 3ggf$, unde

$$x^3 = f^3 + 3fgx + g^3$$

$$x^3 - 3fgx - f^3 - g^3 = 0$$

Comparando jam hujus æquationis terminos cum terminis æquationis generalis assumptæ, oriuntur duæ æquationes (duo puncta (:) divisionem significant) scilicet

1.ª	2.ª
$3fg = p$	$f^3 + g^3 = q$
$g = \frac{1}{3}p : f$	
$g^3 = \frac{1}{27}p^3 : f^3$	

Et substituendo in secunda æquatione valorem ipsius g^3, erit

$$f^3 + \frac{1}{27}p^3 : f^3 = q$$

Mult. per f^3 $\qquad f^6 + \frac{1}{27}p^3 = qf^3$

Sch. Prop. 1. *Cap.* 5. $\qquad f^6 - qf^3 = -\frac{1}{27}p^3$

 Hæc

Hæc autem æquatio utpote derivativa ſecundi gradus facile reſolvitur *per Prop.* 4. *Cap.* 8. hoc pacto

$$f^6 - qf^3 = -\tfrac{1}{27}p^3$$
$$\tfrac{1}{4}qq = \tfrac{1}{4}qq$$

$$f^6 - qf^3 + \tfrac{1}{4}qq = \tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3$$

Extr. rad. $f^3 - \tfrac{1}{2}q = \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}$

$$f^3 = \tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}$$

Extr. rad. Cubica $f = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}}$

Erat autem $f^3 + g^3 = q$, proinde $g^3 = q - f^3$; ſubſtituendo igitur loco f^3 ejus valorem, habetur

$$g^3 = \tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}$$

Extr. rad. Cubica $g = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}}$

Atque hinc $x \ (= f + g) = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}}$.

Quæ quidem eſt formula generalis radicis pro æquatione $x^3 - px - q = 0$.

CAROLL. I. *Si æquatio habeat* $+q$, *ut* $x^3 - px + q = 0$, *tunc in formula generali radicis habetur* $-\tfrac{1}{2}q$. *In ceteris nihil differt, nempe* $x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}}$.

II. Sit

II. Sit æquatio generalis $x^3+px-q=0$, fiat $x=f-g$ (ob $+px$), erit

$$x^3=f^3-3ffg+3ggf-g^3$$
$$-3ffg+3ggf=-3fg\times\overline{f-g}$$

Sed ex hypothesi $x=f-g$, ergo $-3fg\times\overline{f-g}=-3fgx$. Proinde surrogatis in superiori æquatione $-3fgx$ pro $-3ffg+3ggf$, habetur

$$x^3=f^3-3fgx-g^3$$
$$x^3+3fgx-f^3+g^3=0$$

Comparatis terminis hujus cum terminis æquationis generalis assumptæ $x^3+px-q=0$, habentur duæ æquationes

1.ª $3fg=p$	2.ª $g^3-f^3=-q$
$g=\frac{1}{3}p:f$	
$g^3=\frac{1}{27}p^3:f^3$	

Ponatur in secunda valor ipsius g^3, erit

$$\frac{1}{27}p^3:f^3-f^3=-q$$

Mult. per f^3 $\quad \frac{1}{27}p^3-f^6=-qf^3$

Sch. Prop. 1. *Cap.* 5. $f^6-qf^3=\frac{1}{27}p^3$

Ex hac æquatione derivativa secundi gradus facile extrahitur radix *per Prop.* 4. *Cap.* 8. nam addendo utrinque $\frac{1}{4}qq$, habetur

$$f^6-qf^3+\frac{1}{4}qq=\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3$$

Extr. rad. $f^3 - \frac{1}{2}q = \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$

$f^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$

Extr. rad. Cubica $f = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$

Erat autem $g^3 - f^3 = -q$, proinde $g^3 = -q + f^3$, & ſurrogato valore ipſius f^3, oritur

$g^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$

Extr. rad. Cubica $g = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$

Atque hinc $x\ (= f - g) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$ $- \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$.

COROL. II. *Quod ſi in æquatione fuerit* $+q$, *ut* $x^3 + px + q = 0$; *tunc in formula generali prima pars radicis habet* $-\frac{1}{2}q$, *eritque* $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$ $- \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$.

PROPOSITIO VIII.

Æquationes cubicas per formulas generales Cardani reſolvere.

Omnes æquationes Cubicæ, ut in principio hujus capitis annotavimus, ad tres ſequentes formulas reduci poſſunt.

I. x^3

I. $x^3 - px - q = 0$

II. $x^3 - px + q = 0$

III. $x^3 + px - q = 0$

Singulis autem ſingulæ reſpondent formulæ generales radicis Cubicæ earundem, quas ex Cardani methodo *in præc. Prop.* invenimus, ſcilicet

$$\text{I. } \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}}$$

$$\text{II. } \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}}$$

$$\text{III. } \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}$$

Harum formularum uſum celebratiſſimum exempla, quæ ſequuntur, ſatis oſtendent.

I. Sit data æquatio $x^3 - 15x - 4 = 0$. Fiat comparatio cum formula generali $x^3 - px - q = 0$, erit $p = 15$, $\frac{1}{3}p = 5$, & $\frac{1}{27}p^3 = 125$. Item $q = 4$, $\frac{1}{2}q = 2$, & $\frac{1}{4}qq = 4$. Hinc $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = \sqrt{4 - 125} = \sqrt{-121}$, & $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ prima pars radicis. Similiter $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ dat alteram partem. Unde habetur $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

Quod ſi ex binomio Cubico $2 + \sqrt{-121}$, & $2 - \sqrt{-121}$ radix extrahatur per methodum inferius tradendam, erit

una

una pars radicis $2 + \sqrt{-1}$, altera $2 - \sqrt{-1}$, ideoque $x = 4$.

Divisa autem æquatio data per radicem jam inventam, hoc est per $x - 4$, deprimitur ad æquationem secundi gradus, ejusque radices reliquæ facile eruuntur *per Propos.* 1. & 3. *Cap.* 8.

II. Sit data æquatio $x^3 - 1x + 6 = 0$. Facta terminorum comparatione, erit $p = 1$, $\frac{1}{3}p = \frac{1}{3}$, & $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}$. Item $q = 6$, $\frac{1}{2}q = 3$, $\frac{1}{4}qq = 9$. Hinc $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = \sqrt{9 - \frac{1}{27}} = \sqrt{\frac{242}{27}}$, & $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = \sqrt[3]{-3 - \sqrt{\frac{242}{27}}}$ dat primam radicis partem. At vero $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{\frac{242}{27}}}$ dat alteram; proinde $x = \sqrt[3]{-3 - \sqrt{\frac{242}{27}}} + \sqrt[3]{-3 + \sqrt{\frac{242}{27}}} =$ (radice cubica ex utroque membro extracta *per Prop.* 10. *hujus*) $-1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$, $-1 + \sqrt{\frac{2}{3}} = -2$.

III. Sit data æquatio $x^3 + 3x - 6 = 0$. Fiat comparatio cum formula generali $x^3 + px - q = 0$, erit $p = 3$, $\frac{1}{3}p = 1$, & $\frac{1}{27}p^3 = 1$. Item $q = 6$, $\frac{1}{2}q = 3$, $\frac{1}{4}qq = 9$, proinde $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3} = \sqrt{9+1}$, & $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} = \sqrt[3]{3 + \sqrt{10}}$; atque $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{10}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{10}}$.

SCHOL. *Omisimus cum* Wolfio *quartam formulam cubicam* $x^3 + px + q = 0$, *utpote inutilem, seu minus necessariam, cujus radix non differt a radice tertiæ formulæ, nisi in hoc tantum, quod in prima parte radicis apponi debet* $-\frac{1}{2}q$, *in secunda vero* $+\frac{1}{2}q$. *Imo ad solvendam quan-*

cun-

cunque æquationem cubicam, cui desit secundus terminus, sufficit prima Cardani *formula, qua una tanquam generali Canone potest quis satis commode uti.*

PROPOSITIO IX.

Idem problema brevius absolvitur.

Sit æquatio generalis cubicas omnes repræsentans, quæ secundo termino carent, $x^3 + px + q = 0$. Fiat $x = a + b$ (a & b sunt indeterminatæ) erit

$$x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$3a^2b + 3ab^2 = 3ab \times \overline{a+b}, \ \&\ x = a + b$$

Proinde $\quad 3a^2b + 3ab^2 = 3abx$

Adeoque $\quad x^3 = a^3 + 3abx + b^3$

Posito hoc valore loco ipsius x^3 in æquatione generali, habetur

$$a^3 + 3abx + b^3 + px + q = 0$$

Fiant duæ æquationes, quarum altera contineat quantitates radicales, altera rationales, & utraque æquetur zero.

$$1.^a \quad 3abx + px = 0 \qquad 2.^a \quad a^3 + b^3 + q = 0$$

Ex prima habetur $b = -\frac{p}{3a}$, & $b^3 = -\frac{p^3}{27a^3}$. Hoc valore posito in secunda æquatione, oritur

Mult.

Mult. per a^3 $$a^3 - \frac{p^3}{27a^3} + q = 0$$

$$a^6 + qa^3 = \frac{p^3}{27}$$

Et resoluta hac æquatione derivativa secundi gradus, addendo utrinque $\frac{1}{4}qq$, *per Prop.* 4. *Cap.* 8. habetur

$$a^3 = -\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}$$

$$a = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}$$

Erat autem $b = -\frac{p}{3a}$, proinde secunda pars radicis (ob $x = a + b$) obtinebitur dividendo $-p$ per triplum primæ partis radicis inventæ, hoc est per $3a$, eritque $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$.

I. Sit æquatio $x^3 - 7x - 6 = 0$, erit $p = -7$, & $\frac{p^3}{27} = -\frac{343}{27}$. At $q = -6$, & $\frac{1}{4}qq = 9$, hinc invenitur $x = \sqrt[3]{3 \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \frac{7}{3\sqrt[3]{3 \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}}}$.

II. Sit æquatio $x^3 - 6x + 8 = 0$: comparatis terminis cum terminis formulæ generalis, erit $p = -6$ & $\frac{1}{27}p^3 = -8$: item $q = 8$ & $\frac{1}{4}qq = 16$. Hinc habetur $x = \sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}} + \frac{2}{\sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}}}$.

Co-

COROLL. *Hæ formulæ radicis generales conveniunt, ut patet, cum formulis, quas* in Prop. 6. hujus *alia via tradidimus. Sunt hæ quidem multo simpliciores illis, quas in superiori* Prop. 7. *explicavimus, cum hæ unicam radicis extractionem, illæ duas requirant.*

SCHOL. I. *At dubitant hic tyrones, an per diversas ejusmodi formulas eadem omnino radix obtineatur. An ex. gr. superioris primæ æquationis* $x^3 - 7x - 6 = 0$ *radix per formulam Propos. hujus expressa* $\sqrt[3]{3 \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \frac{7}{3\sqrt[3]{3 \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}}}$ *sit omnino eadem cum æquationis ejusdem radice, quæ per primam* Cardani *formulam haberetur, nempe* $\sqrt[3]{3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}}$, *hoc est an secunda hujus pars secundæ parti alterius formulæ sit æqualis. Sed nullum est prorsus dubium. Ponatur enim*
$$\frac{7}{3\sqrt[3]{3 \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}}}, \text{ seu } \frac{\frac{7}{3}}{\sqrt[3]{3 \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}}} = \sqrt[3]{3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}},$$
erit ex communi lege æquationum $\frac{7}{3} = \sqrt[3]{3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}} \times \sqrt[3]{3 \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}}$, *factaque radicalium multiplicatione* per Prop. 12. Cap. 4. *invenitur* $\frac{7}{3} = \sqrt[3]{\frac{343}{27}} = \frac{7}{3}$. *Et quidem extracta radice tertia ex binomio cubico* $3 \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}$ per Prop. 10. hujus, *habetur* $1 \pm \sqrt{-\frac{4}{3}}$, *adeoque* $1 + \sqrt{-\frac{4}{3}} \times 1 - \sqrt{-\frac{4}{3}} = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$, *ut prius; proinde evidens est, ex utraque formula eandem radicem obtineri.*

SCHOL. II. *Si in æquatione cubica radix aliqua ratio-*

 nalis

nalis existat, tunc ejusmodi formulas inutiles quidem esse censeo, cum talis æquatio via brevissima resolvi possit per Prop. 4. vel 5. hujus; *& absurdi genus sit, radicem rationalem per terminos radicales, imo etiam per radices imaginarias inquirere. Quod si æquatio duas radices imaginarias continet & unam realem irrationalem, tunc hujusmodi formulæ opportune adhibentur.*

SCHOL. III. *Ceterum ubi in æquatione* $x^3 - px \pm q = 0$ *habetur* $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, *adeoque tres radices reales, & inæquales sunt* per Prop. 1. num. 2. *& nulla earum rationalis invenitur* per Propos. 3 vel 5., *tunc necessario* $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$ *erit quantitas imaginaria. Proinde radices, quæ ex natura æquationis reales esse debent, tanquam imaginariæ per* Cardani, *aliorumque formulas nobis exhibentur. Quod plane est absurdum. Et licet sagacissimum Analystarum ingenium, ut huic malo occurreret, ex binomio Cubico radices imaginarias involvente radicem realem erui posse docuerit, quod & nos in sequenti Propos. explicabimus, id tamen nodum non solvit. Nam hoc tunc solum bene est, cum æquatio unam saltem radicem realem & simul rationalem continet: sed ubi nulla rationalis est, & omnes reales, tunc ars deficit, nullaque ratione per Analysim radices ejusmodi exprimi possunt. Et hic dicitur* casus irreductibilis, & irresolutus; *in quo opus est ad Geometriam confugere, quæ radices illas per lineas exprimit: quemadmodum ipsa rationem, quam quadrati latus ad diametrum habet incommensurabilem, quæque numeris explicari non potest, per lineas opportune designat.*

PRO-

PROPOSITIO X.

Ex binomio Cubico radicem extrahere.

EXtrahenda ſit radix cubica ex binomio $20 + \sqrt{392}$. Reducatur pars radicalis $\sqrt{392}$ ad ſimpliciorem expreſſionem *per Cor.* 1. *Prop.* 2. *Cap.* 4. fiet $14\sqrt{2}$.

Certum eſt, binomiæ radicis partem unam fore $\sqrt{2}$, vel hujus multiplum (ut in ſecundo exemplo) per numerum rationalem exprimendum, quem voco m. Nam ſi $\sqrt{2}$ non ingrederetur radicem, neque cubum ingrederetur, ut manifeſtum eſt.

Ponatur itaque binomii cubici $20 + 14\sqrt{2}$ pars rationalis $20 = a$, irrationalis autem $14\sqrt{2} = m\sqrt{c}$, erit tota radix $a + m\sqrt{c}$, ex qua (a, c, m ſunt indeterminatæ) fiat cubus

$$a^3 + 3a^2 m\sqrt{c} + 3\,mmac + m^3 c\sqrt{c}$$

Cujus pars rationalis eſt $a^3 + 3mmac$; pars irrationalis $3a^2 m \sqrt{c} + m^3 c\sqrt{c}$. Quia vero $\sqrt{c} = \sqrt{2}$, erit

$$3a^2 m\sqrt{c} + m^3 c\sqrt{c} = 3a^2 m\sqrt{2} + m^3 2\sqrt{2} = 14\sqrt{2}.$$

Poſito $m = 1$, & dividendo per $\sqrt{2}$, habetur

$$3a^2 + 2 = 14$$
$$3a^2 = 12$$
$$a^2 = 4$$
$$a = 2$$

Valore autem ipſius a in altera radicis parte ſubſtituto, erit

$$a^3 + 3mmac = 8 + 12 = 20$$

 Quod

Quod quidem cum hypothesi optime convenit, proinde radix cubica $a + m\sqrt{c} = 2 + \sqrt{2}$.

II. Sit extrahenda radix cubica ex binomio $\sqrt{18252} - 135$. Reducatur *per Prop.* 2. *Cap.* 4. ad simplicem expressionem, fiet $78\sqrt{3} - 135$.

Ponatur radix esse $m\sqrt{c} - a$ (hoc est $78\sqrt{3} = m\sqrt{c}$ & $-135 = -a$) & fiat cubus

$$m^3c\sqrt{c} - 3m^2ac + 3a^2m\sqrt{c} - a^3$$

Cum sit $\sqrt{3} = \sqrt{c}$, pars irrationalis erit

$$m^3c\sqrt{c} + 3a^2m\sqrt{c} = 3m^3\sqrt{3} + 3a^2m\sqrt{3} = 78\sqrt{3}.$$

Posito autem $m = 1$, & dividendo per $\sqrt{3}$, erit

$$3 + 3a^2 = 78$$
$$3a^2 = 75$$
$$a^2 = 25$$
$$a = 5$$

Quo valore surrogato in altera radicis parte, habetur

$$-a^3 - 3m^2ac = -125 - 45 = -170$$

Quod cum hypothesi minime convenit, deberet enim esse -135; proinde signum est m sumptum esse justo minorem.

Ponatur $m = 2$, adeoque $m\sqrt{c} = 2\sqrt{3}$, erit

$$m^3c\sqrt{c} + 3a^2m\sqrt{c} = 24\sqrt{3} + 6a^2\sqrt{3} = 78\sqrt{3}$$

Div. per $\sqrt{3}$) $24 + 6a^2 = 78$
$$6a^2 = 54$$
$$a^2 = 9, \text{ hinc } a = 3$$

Proin-

Proinde pars rationalis $-a^3-3m^2ac=-27-108$ $=-135$. Quod quia cum hypothesi recte convenit, infertur, radicem cubicam $m\sqrt{c}-a=2\sqrt{3}-3$.

III. Sit binomium $3+\sqrt{-\frac{100}{27}}$, cujus radix cubica quæritur. Habetur *per Propos.* 2. *Cap.* 4. $\sqrt{-\frac{100}{27}}=\frac{5}{3}\sqrt{-\frac{4}{3}}$. Hinc ponatur $3+\frac{5}{3}\sqrt{-\frac{4}{3}}=a+m\sqrt{c}$ radici, ex qua fiat Cubus

$$a^3+3a^2m\sqrt{c}+3am^2c+m^3c\sqrt{c}$$

Et quia $\sqrt{c}=\sqrt{-\frac{4}{3}}$, pars radicalis erit

$$3a^2m\sqrt{c}+m^3c\sqrt{c}=3a^2m\sqrt{-\frac{4}{3}}+m^3\times-\frac{4}{3}\sqrt{-\frac{4}{3}}.$$

Posito $m=1$, & dividendo per $\sqrt{-\frac{4}{3}}$, oritur

$$3a^2-\frac{4}{3}=\frac{5}{3},\ \&\ 3a^2=\frac{9}{3}$$
$$a^2=\frac{9}{9},\ \&\ a=\pm 1$$

Quo valore substituto, habetur pars rationalis

$$a^3+3m^2ac=-1+4=3$$

Quod convenit cum hypothesi, unde radix quæsita $a+m\sqrt{c}=1+\sqrt{-\frac{4}{3}}$.

IV. Extrahenda sit radix cubica ex binomio, cujus utraque pars est irrationalis $\sqrt{243}+\sqrt{242}$, quod *per Propos.* 2. *Cap.* 4. fit $9\sqrt{3}+11\sqrt{2}$.

Ponatur prima pars radicis $9\sqrt{3}=m\sqrt{c}$, secunda vero $11\sqrt{2}=n\sqrt{d}$, adeoque tota radix erit $m\sqrt{c}+n\sqrt{d}$, & cubus ex illa factus

$$m^3c\sqrt{c}+3m^2nc\sqrt{d}+3mn^2d\sqrt{c}+n^3d\sqrt{d}$$

Atque

Atque hinc ob $m\sqrt{c} = 9\sqrt{3}$, erit una pars

$$m^3c\sqrt{c} + 3mn^2d\sqrt{c} = 3m^3\sqrt{3} + 6mn^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

Posito autem $m = 1$, & dividendo per $\sqrt{3}$, habetur

$$3 + 6n^2 = 9, \ \& \ 6n^2 = 6$$

hinc $n = 1$

Ideoque hoc valore in altero membro substituto, erit

$$3m^2nc\sqrt{d} + n^3d\sqrt{d} = 9\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$$

Quod sane cum hypothesi convenit, unde radix cubica quæsita $m\sqrt{c} + n\sqrt{d} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Coroll. *Cum substituto valore provenit numerus numero rationali major (ut in secundo exemplo pro* — 135 *proveniebat* — 170) *signum est, valorem ipsius* m *sumptum esse justo minorem, adeoque sumendum alium illo majorem. Sin autem pro* — 135 *provenisset numerus minor, tunc esset indicium* m *sumptum esse justo majorem; proinde si in primo casu fuit* m = 1, *& in secundo* m = 2, *sumi debet intermedium, hoc est* m = 1 ½. *Quo facto, si res nec bene succedat, signum est, binomii radicem, qualis quæritur, non haberi. Ceterum valor ipsius* m *semper debet esse vel numerus integer, vel saltem integri dimidius.*

Schol. I. *Si* m *non est pars aliquota quantitatis, quæ signo radicali præfigitur, radix cubica non obtinetur, quod advertatur.*

Schol. II. *Præclara hæc methodus est* Jo: Wallisii ([a]), *quæ, ut ipse ait, est ceteris longe simplicior. Nam quæ primum*

(a) Algebra Cap. 47. Oper. Tom. 2.

mum a Francisco Schotenio ([a]), *deinde* a Jacobo Ozanam ([b]) *aliisque inde scriptoribus tradita est regula, prolixior est, & plures exigit cautiones. Quæ autem traditur a* Wolfio ([c]) *per analysim, non modo prolixior est, sed æquationis cubicæ solutionem involvit, cujus radix non ita facile occurrit; imo illa, nisi sit rationalis, inveniri non potest. Ex hac vero methodo cito certi sumus, an radix quæsita ex binomio dato extrahi possit.*

SCHOL. III. *Pro facili & expedito examine radicis ex binomio cubico inventæ, satis erit investigare ejus partem rationalem tantum: quod fit addendo cubum partis rationalis ad triplum ejusdem partis multiplicatæ per quadratum partis alterius. Sic ex binomio* $78\sqrt{3} - 135$ *fit radix inventa* $2\sqrt{3} - 3$. *Adde cubum partis rationalis* -3, *scilicet* -27, *ad triplum ejusdem partis* -9 *multiplicatæ per quadratum partis alterius* 12, *nempe ad* -108, *summa dat* -135: *quod quia convenit cum parte rationali binomii dati, constat* $2\sqrt{3} - 3$ *esse veram radicem. Ceterum radix cubica per superiorem* Wallisii *methodum inventa hoc examine probari non indiget, cum de ipsa aliunde certi simus.*

SCHOL. IV. *Quod si e binomio cubico radix extrahi nullo modo possit, & æquationis datæ radices per* Cardani *regulas expressæ valde implicatæ appareant, tunc præstat, ut* Franciscus Schootenius ([d]) *opportune admonet, æquationem illam ex sola sua constitutione innuere, quam ipsam confuse per easdem* Cardani *formulas exprimere. Sic data æqua-*

([a]) Comment. Geometr. Cartes. edit. 3. pag. m. 389. ([b]) Nouveaux Elemens de Algeb. Cap. 5. Probl. VIII. ([c]) Elementa Analyt. edit. 3. Probl. 169. ([d]) Comment. in lib. 3. Geom. Cartes.

æquatione $x^3 = 8x + 24$, *ejus naturam facilius concipies, si dicas, radicem hujus æquationis* x *talem esse, ut si multiplicetur per* 8, *& insuper addantur* 24, *æqualis sit futura suo cubo* x^3, *quam si eandem per* Cardani *formulam primam hoc modo exprimas* $x = \sqrt[3]{12 + \sqrt{125\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{12 - \sqrt{125\frac{1}{27}}}$. *Et sic de aliis.*

PROBLEMATA CUBICA.

PROBL. I.

Data summa duorum cuborum & differentia laterum, latera ipsa invenire.

Sit summa cuborum $= 2a$, latera $= 2x$, quorum differentia sit $= 2b$, erit latus majus $x + b$, minus $x - b$ *per Theor.* 3. *Cap.* 5. Cubi vero ex ipsis dant æquationem, quæ sequitur

$$2x^3 + 6b^2x = 2a$$

Div. per 2.

$$x^3 + 3b^2x = a$$

$$x^3 + 3b^2x - a = 0$$

Si fiat $a = 14$, $b = 1$, erit æquatio determinata

$$x^3 + 3x - 14 = 0$$

Quæ resolvitur *per Propos.* 4. *hujus*. Nam assumendo quadratum 4, erit $4 + 3 = 7$, per quem dividendo 14, quotus 2, (radix quadrati assumpti) dat radicem æquationis quæsitam. Erit ergo unum latus $x + b = 2 + 1$, alterum $x - b = 2 - 1$. Bre-

Brevius resolvitur *per Prop.* 5. *hujus*. Nam sumpta radice cubica proxime minori ipsius 14, nempe 2, fit cubus 8, & facta hinc inde utriusque cubi subtractione, habetur statim $x = 2$

$$x^3 + 3x = 14$$

Subtr. $x^3 \qquad 8$

$$+ 3x = 6$$
$$x = 2$$

PROBL. II.

Data summa duorum cuborum & rectangulo sub lateribus, invenire ipsa cuborum latera.

Sit Cuborum summa $= 2a$, rectangulum ex lateribus $= 2b$, latus unum quæsitum $= x$, & alterum $= y$, erit $x^3 + y^3 = 2a$, & $xy = 2b$; hinc $y = \frac{2b}{x}$, & $y^3 = \frac{8b^3}{x^3}$ Et substituto in prima æquatione loco y^3 ejus valore, habetur

$$x^3 + \frac{8b^3}{x^3} = 2a$$

Mult. per x^3

$$x^6 + 8b^3 = 2ax^3$$
$$x^6 - 2ax^3 = -8b^3$$

Quæ cum sit derivativa secundi gradus, si fiat $x^3 = z$, erit *per Prop.* 4. *Cap.* 8. æquatio

$$z^2 - 2az = -8b^3$$

 Si

Si supponatur $2a = 72$, & $2b = 8$, æquatio convertitur in sequentem

$$z^2 - 72z = -512$$

Prop. 1. *Cap.* 8. *adde* 1296 1296

Extr. rad.

$$z^2 - 72z + 1296 = 784$$

$$z - 36 = \sqrt{784}\ (= 28)$$

$$z = 36 + 28 = 64$$

Sed posita fuit $x^3 = z$, ergo $x = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{64} = 4$. Est ergo $x = 4$, & $y\ (= \frac{2b}{x}) = \frac{8}{4} = 2$.

PROBL. III.

Invenire tres numeros Arithmetice proportionales, quorum differentia & solidum ab illis factum sunt data.

Sit trium proportionalium quæsitorum differentia data $= d$, solidum $= s$, & numerorum quæsitorum primus $= x$, erit secundus $= x + d$, tertius $= x + 2d$ *per Schol.* 1. *Prop.* 3. *Cap.* 5., & solidum ab illis factum

$$x^3 + 3dx^2 + 2ddx = s$$

Auferatur secundus terminus *per Propos.* 5. *Cap.* 6. facto $x = y - d$, oritur æquatio

$$y^3 \ * \ - ddy = s$$

Proinde si supponatur $d = 3$, & $s = 28$, æquatio eadem erit

y^3

$$y^3 * -9y = 28$$
$$y^3 - 9y - 28 = 0$$

Hæc autem facile resolvitur *per Prop. 6. hujus*. Fiat enim $p = 9$, $q = 28$; ex formula generali $x^3 - px \pm q = 0$ invenitur $y = \sqrt[3]{14 + \sqrt{169}} + \frac{3}{\sqrt[3]{14 + \sqrt{169}}}$. Ex hoc binomio cubico extracta radice *per Prop. 10. hujus*, habetur $y = 2 + \sqrt{1} + \frac{3}{2 + \sqrt{1}}$, factaque reductione, hoc est multiplicando primam partem per denominatorem alterius, & addendo illi $\frac{1}{3}p$, seu (in hoc exemplo) 3, habetur $\frac{8 + 4\sqrt{1}}{2 + \sqrt{1}}$. Fiat actu divisio *per Prop. 6. Cap.* 4. erit quotus 4. Est ergo $y = 4$; sed posita fuit $x = y - d$, unde erit $x = 4 - 3 = 1$. Sunt ergo numeri proportionales quæsiti 1, 4, 7, quorum solidum $= 28$.

COROLL. *Poterat quoque Problema resolvi* per Prop. 4. vel 5. hujus, *cum unam radicem rationalem habeat, ut patet: imo &* per Propos. 1. Cap. 7. *cum habeatur* 4 *unus ex ultimi termini divisoribus, positoque* $y = 4$, *tota æquatio evanescat. Malui tamen* per Prop. 6. hujus *illud resolvere, ut tyrones discant radices ex binomio Cubico extractas reducere, & alia, in quibus difficultatem quandoque solent experiri.*

PROBL. IV.

Numerum 10 ita dividere in quatuor partes Geometrice continue proportionales, ut si prima ducatur in 8, secunda in 4, tertia in 3, & quarta in 1. summa omnium fiat 16.

Sit una dati numeri pars $=x$, & proportionis Geometricæ denominator $=y$, erit ex prima problematis conditione $x+xy+xy^2+xy^3=10$, & ex secunda $8x+4xy+3xy^2+xy^3=16$. Sumptoque ex utraque æquatione valore ipsius x, erit

$$x=\frac{10}{1+y+y^2+y^3},\quad x=\frac{16}{8+4y+3y^2+y^3}$$

Proinde $$\frac{10}{1+y+y^2+y^3}=\frac{16}{8+4y+3y^2+y^3}$$

Unde $$y^3-\tfrac{7}{3}y^2-4y-\tfrac{32}{3}=0$$

$$1.\quad 3.\quad 9.\quad 27.$$

$$y^3-7y^2-36y-288=0$$

Et dividendo per $y-12$, nihil remanet, adeoque $y=12$. Sed cum radix superioris æquationis ad fractiones tollendas multiplicata sit per progressionem Geometricam triplam, erit 12 triplum quæsitæ radicis; hinc posito in alterutra æquatione $y=4$, erit $x=\frac{2}{17}$ prima pars quæsita, reliquæ vero $\frac{8}{17}$, $\frac{32}{17}$, $\frac{128}{17}$, quarum summa $\frac{170}{17}=10$, & si

& si singulæ ducantur in numeros imperatos, erit earum summa $\frac{272}{17} = 16$, ut patet.

SCHOL. *Problematis hujus auctor est* Lucas Paciolus (a) *a quo fuit particulari ratione per numeros determinatos solutum. Generalem ejusdem solutionem per Algebram tentavit* Joannes Camillus Gloriosus (b), *sed cum immenso pene calculo plures paginas implevisset, opus omnino non absolvit. Concinna hæc solutio* ab Antonio de Monforte (c) *tradita est.*

PROBL. V.

Datis duabus rectis, alteram earum ita producere, ut alterius quadratum ad quadratum partis productæ eandem rationem habeat, quam pars producta ad totam rectam.

SInt rectæ datæ a & b, & producatur b, cujus pars producta sit x, tota recta erit $b + x$, & ex conditione probl.

$$a^2 . x^2 :: x . b + x$$

Theor. 4. *Cap.* 5.

$$x^3 = a^2 b + a^2 x$$

$$x^3 - a^2 x - a^2 b = 0$$

Sit $a = 2$, $b = 12$, æquatio fiet

$$x^3 - 4x - 48 = 0$$

Cujus resolutio facile obtinetur *per Prop.* 4. *vel* 5. *hujus*, ex qui-

(a) Arithm. Quæst. 27. (b) Exercitat. Mathemat. 4. Neap. 1635. (c) Tract. de Probl. determinat. Neap. 1690.

ex quibus innotescit $x=4$, unde $b+x=16$. Quod si ponatur $a=2$, $b=5$, fiet æquatio, quæ nonnisi per Cardani regulas expeditur, nempe

$$x^3-4x-20=0$$

Erit igitur $p=4$, $\frac{1}{3}p=\frac{4}{3}$, & $\frac{1}{27}p^3=\frac{64}{27}$. Item $q=20$, $\frac{1}{2}q=10$, $\frac{1}{4}qq=100$. Hinc invenitur

$$x=\sqrt[3]{10+\sqrt{\tfrac{2636}{27}}}+\sqrt[3]{10-\sqrt{\tfrac{2636}{27}}}.$$

Hujus autem binomii cubici radix (siquidem extrahi possit) obtinebitur *per Prop.* 10. *hujus*.

PROBL. VI.

Invenire triangulum ABC, *cujus latera* AB, AC, BC *&* *perpendiculum* DC *sint in Arithmetica proportione*. Fig. 7.

Ponatur perpendiculum $CD=x$, differentia laterum trianguli $=d$, erit $BC=x+d$, $AC=x+2d$, $AB=x+3d$ *per Schol.* 1. *Propos.* 3. *Cap.* 5. Est autem $\overline{AD}^2=\overline{AC}^2-\overline{CD}^2$, & $\overline{BD}^2=\overline{BC}^2-\overline{CD}^2$ *per Prop.* 47. *l.* 1. *Eucl.* erunt proinde $AD=\sqrt{(\overline{AC}^2-\overline{CD}^2)}$, & $BD=\sqrt{(\overline{BC}^2-\overline{CD}^2)}$; adeoque $AD=\sqrt{4dx+4d^2}$, & $BD=\sqrt{2dx+d^2}$, proinde tota AB $(=x+3d)=\sqrt{4dx+4d^2}+\sqrt{2dx+d^2}$.

Fiat

Fiat calculi commodo $x + 3d = m$, erit

$$m = \sqrt{4dx + 4d^2} + \sqrt{2dx + d^2}$$

$$m - \sqrt{4dx + 4d^2} = \sqrt{2dx + d^2}$$

Elevetur utrunque membrum ad quadratum, ut radicales exterminentur *per Reg.* 4. *Prop.* 1. *Cap.* 5. erit

$$m^2 - 2m\sqrt{4dx + 4d^2} + 4dx + 4d^2 = 2dx + d^2$$

$$m^2 - 2m\sqrt{4dx + 4d^2} + 2dx + 3d^2 = 0$$

$$m^2 + 2dx + 3d^2 = 2m\sqrt{4dx + 4d^2}$$

Elevato rurſus ad quadratum utroque hujus æquationis membro, & facta terminorum reductione *per Lem. Cap.* 1. habetur

$$m^4 - 12dxm^2 - 10d^2m^2 + 4d^2x^2 + 12d^3x + 9d^4 = 0$$

Subſtitutis autem valoribus loco m^4 & m^2, factaque reductione *per Lem. cit.* invenitur tandem æquatio

$$x^3 - 24d^2x - 48d^3 = 0$$

Quæ quidem eſt eadem, quam innuit Newtonus (a) in hoc eleganti problemate, cujus ipſe auctor eſt. Reſolvitur autem ultimo *per Prop.* 8. *vel* 9. *hujus*. Nam fiat $d = 1$, $p = 24$, $\frac{1}{3}p = 8$, & $\frac{1}{27}p^3 = 512$: item $q = 48$, $\frac{1}{2}q = 24$, & $\frac{1}{4}qq = 576$, invenitur per Cardani formulas $x = \sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2}$.

CA-

(a) Arithm. Univerſ. Probl. Geom. XIV. Londini an. 1722.

CAPUT X.

De Æquationibus Biquadraticis & aliis altiorum graduum.

SEcundus terminus, radicales & fractiones supponuntur, si forte adsint, ab æquatione sublatæ *per Propos.* 2. 8. & 9. *Cap.* 7.

PROPOSITIO I.

Æquationes biquadraticas ad cubicas reducere.

SIt æquatio generalis repræsentans omnes æquationes quarti gradus secundo termino carentes

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

Cum hæc concipi possit veluti orta ex duabus æquationibus secundi gradus, quas *componentes* vocabimus, nempe

$$x^2 + yx + f = 0, \quad \& \quad x^2 - yx + g = 0$$

Fiat ex earum multiplicatione æquatio æqualis priori $x^4 + px + qx + r = 0$, secundo termino carens (ob terminos $+yx$ & $-yx$ contrario signo affectos) nimirum

$$\begin{aligned} x^4 + fx^2 - fyx + fg &= 0 \\ + gx^2 + gyx & \\ - y^2x^2 & \end{aligned}$$

Com-

Comparentur æquationis utriusque termini, erunt tres æquationes

$$f+g-y^2=p,\ gy-fy=q,\ \&\ fg=r$$

Ex quibus efformari debet alia, in qua non occurrat ulla incognita præter y, quæ in utraque componente est secundi termini coefficiens.

Hinc quia $f+g-y^2=p$, erit quoque $f+g=p+y^2$, & multiplicando omnes terminos per y, fit

$$fy+gy=py+y^3$$

Sed habetur ex secunda æquatione $gy-fy=q$; ergo hæ duæ æquationes simul additæ efficiunt $2gy=py+y^3+q$. Si subtrahantur vero, fiunt $2fy=py+y^3-q$; unde eruuntur ipsarum f & g valores, scilicet

$$g=\frac{py+y^3+q}{2y},\ f=\frac{py+y^3-q}{2y}$$

$$fg=\frac{py+y^3-q}{2y}\times\frac{py+y^3+q}{2y}$$

$$fg=\frac{p^2y^2+2py^4+y^6-q^2}{4y^2}$$

Mult. per $4y^2$

$$4fgy^2=p^2y^2+2py^4+y^6-q^2$$

Erat autem $fg=r$, proinde si utrunque membrum multiplicetur per $4y^2$, erit $4fgy^2=4ry^2$, ideoque fiet

$$4ry^2=p^2y^2+2py^4+y^6-q^2$$

 Et

Et ordinata æquatione habetur æquatio generalis cubica, nimirum

$$y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - q^2 = 0$$
$$- 4ry^2$$

Quæ, licet ſexti gradus eſſe appareat, habetur tanquam cubica, cum omnes incognitæ termini ſint diviſibiles per 2, & dicitur *Cubica derivata*, cui innititur æquationum omnium quarti gradus reſolutio, ut per exempla, quæ ſequuntur, planum fiet.

Coroll. I. *Cum æquatio hæc* Cubica derivata *ſit generalis, utpote orta ex æquatione illa generali* $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, *quæ æquationes omnes quarti gradus repræſentare ſupponitur, hinc eſt, quod data quarti gradus æquatione ſpeciali, poterit ſtatim haberi ejus Cubica derivata, ſubſtituendo in cubica generali loco* p, q *&* r *valores æquationis particularis datæ. Sit data æquatio* $x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0$, *erit* $p = -4$, $q = -8$, *&* $r = 35$. *Poſitis his valoribus in cubica generali, habetur cubica derivata particularis* $y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0$. *Similiter ſit data æquatio* $x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0$, *erit* $p = -17$; $q = -20$, $r = -6$. *Unde Cubica derivata erit* $y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0$. *Quæ quidem ſemper conſiderari poterit ut ſimpliciter cubica, & tanquam mere cubica reſolvi, ſecundo termino ſublato. Nam ſi ponatur* $y^2 = z$, *fiet* $z^3 - 34z^2 + 313z - 400 = 0$, *& ob* $z = y^2$, *erit* $\sqrt{z} = y$.

Coroll. II. *Si in duabus illis componentibus* $x^2 + yx + f = 0$, *&* $x^2 - yx + g = 0$ *ponatur valor duarum indeterminatarum* f *&* g per hanc Propoſ. *inventus, oriuntur duæ æquationes* x^2

$$x^2 + yx + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$$

$$x^2 - yx + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0$$

Quæ quidem, cognito valore y, *fiunt omnino cognitæ, & determinatæ, ut patet.*

SCHOL. I. *Si in data æquatione particulari habeatur* $+p$, *tunc in utraque harum duarum ponitur* $+\tfrac{1}{2}p$. *Contra vero in utraque ponitur* $-\tfrac{1}{2}p$, *si æquatio particularis data habeat* $-p$.

SCHOL. II. *Si in data æquatione habeatur* $+q$, *tunc in una duarum, in qua scilicet habetur* $+yx$, *ponitur* $-\frac{q}{2y}$. *In altera, in qua est* $-yx$, *ponitur* $+\frac{q}{2y}$. *Contra vero si in data æquatione habeatur* $-q$, *ponendum est* $-\frac{q}{2y}$ *in illa, in qua habetur* $-yx$, *&* $+\frac{q}{2y}$ *in altera, ubi reperitur* $+yx$.

PROPOSITIO II.

Æquationes quarti gradus resolvere.

ÆQuatio data reducatur ad cubicam *per Cor.* 1. *Prop. præc.* & ex cubica derivata extrahatur radix *per Prop.* 4. *vel* 5. *Cap.* 9. si sit rationalis, vel *per Propos.* 8. *aut* 9. si sit irrationalis. Radicis hujus cubicæ valor, tum etiam valores *p* & *q* æquationis datæ ponantur in duabus illis

illis indeterminatis fecundi gradus, quæ habentur *in Coroll.* 2. *Prop. præc.*, facile erit obtinere quatuor æquationis datæ radices, quemadmodum exempla rem illuſtrabunt.

I. Sit æquatio, qua Carteſius (a) ipſe utitur, $x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0$, erit (facta comparatione cum formula generali $x^4 + px^2 + qx + r = 0$) $p = -17$, $q = -20$, $r = -6$, ejuſque cubica derivata $y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0$ *per Coroll.* 1. *Propoſ. præc.* Inveniatur valor y *per Prop.* 4. *vel* 5. *Cap.* 9. tollendo prius ſecundum terminum. Vel brevius reperiri poteſt, dividendo æquationem ipſam per aliquod quadratum, quod inter diviſores ultimi termini exiſtat, ex. gr. per $yy - 16$. Sic enim diviſio exacte ſuccedit; unde $yy = 16$, & $y = 4$.

Hoc valore una cum valoribus p & q poſito in duabus æquationibus $x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$, & $x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0$, habentur duæ æquationes ſecundi gradus $x^2 + 4x + 2 = 0$, & $x^2 - 4x - 3 = 0$ *per Coroll.* 2. *Prop. præc.* in quibus apparent ſigna + & −, ut docuimus *in Schol.* 1. *&* 2. *Prop. cit.* earumque reſolutio obtinetur *per Prop.* 1. *&* 3. *Cap.* 8. Radices enim prioris ambæ negativæ ſunt $-2 + \sqrt{2}$, & $-2 - \sqrt{2}$; alterius vero affirmativæ $2 + \sqrt{7}$, & $2 - \sqrt{7}$.

II. Sit æquatio $x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0$: comparatis terminis cum formula generali, erit $p = -12$, $q = 12$, & $r = -3$; ejuſque cubica derivata $y^6 - 24y^4 + 156y^2 - 144 = 0$ *per Coroll.* 1. *Prop. præc.* Cujus radix invenitur *per Prop.* 4. *vel* 5. *Cap.* 6. Vel brevius dividendo

(a) Geomett. lib. III. edit. 3. pag. m. 80.

dendo æquationem per aliquem ultimi termini divisorem v. g. per $yy - 12$, per quem divisio exacte succedit. Est ergo $yy = 12$, & $y = 2\sqrt{3}$.

Ponatur hic valor simul & valores p & q in duabus indeterminatis secundi gradus, ut factum est supra in primo exemplo, erunt duæ secundi gradus æquationes $x^2 + 2x\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$, & $x^2 - 2x\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$ *per Coroll.* 2. *& Schol.* 1. *&* 2. *Prop. præc.* Quarum radices facile obtinentur *per Prop.* 1. *Cap.* 8. addendo utrique quadratum quantitatis cognitæ secundi termini divisæ per 2, nempe addendo $+3$ (nam $\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, cujus quadratum $= 3$) Prioris ergo radices sunt $\sqrt{3 + \sqrt{3}} - \sqrt{3}$, & $-\sqrt{3 + \sqrt{3}} - \sqrt{3}$. Posterioris vero sunt $\sqrt{3 + \sqrt{3}} + \sqrt{3}$, & $-\sqrt{3 + \sqrt{3}} + \sqrt{3}$.

III. Sit æquatio $x^4 - 6x^2 + 12x - 10 = 0$. Comparatis terminis cum formulæ generalis terminis, erit $p = -6$, $q = 12$ & $r = -10$, & ejus cubica derivata $y^6 - 12y^4 + 76y^2 - 144 = 0$, seu $z^3 - 12z^2 + 76z - 144 = 0$ *per Coroll.* 1. *Prop. præc.* Hæc autem cum nullum divisorem admittat, indicio est, non habere valorem rationalem. Inveniatur ergo valor ejusdem *per Propos.* 8. *Cap.* 9. Sed prius auferatur ab æquatione secundus terminus hoc pacto. Fiat $z - 4 = v$, erit $z = v + 4$, factaque potestatum substitutione, habetur transformata secundo termino carens, scilicet

z^3

$$\begin{array}{l|r} z^3 & = v^3 + 12v^2 + 48v + 64 \\ -12z^2 & -12v^2 - 96v - 192 \\ +76z & +76v + 304 \\ -144 & -144 \\ \hline \end{array}$$

Summa $v^3 \quad * \quad + 28v + 32 = 0$

Ex hac æquatione eruitur valor v *per Schol. Propos.* 8. *Cap.* 9. nempe

$$v = \sqrt[3]{-16 + \sqrt{\tfrac{28864}{27}}} - \sqrt[3]{16 + \sqrt{\tfrac{28864}{27}}}$$

Sed posita fuit $z - 4 = v$, proinde erit.

$$z = 4 + \sqrt[3]{-16 + \sqrt{\tfrac{28864}{27}}} - \sqrt[3]{16 + \sqrt{\tfrac{28864}{27}}}$$

Erat autem $y^2 = z$, unde $y = \sqrt{z}$, atque hinc

$$y = 2 + \sqrt{\sqrt[3]{-16 + \sqrt{\tfrac{28864}{27}}} - \sqrt[3]{16 + \sqrt{\tfrac{28864}{27}}}}$$

Hoc valore ipsius y simul cum valoribus p & q surrogatis in duabus illis æquationibus secundi gradus, ut in primo & secundo exemplo factum est, hæ determinantur *per Coroll.* 2. *Prop. præc.* & quatuor, quæ inde eruuntur, radices dant radices æquationis propositæ. Hoc autem cum calculum valde prolixum & permolestum exigat, necesse non erit ultra pergere: nam problemata, quæ ab æquationibus hujus generis dependent, ad Solidorum Geometriam amandantur.

Coroll. *Valor incognitæ* y *ex cubica derivata inventus vel rationalis est, ut in primo exemplo; vel radices quadra-*

quadraticas continet, ut in secundo; vel denique est irrationalis radicales cubicas involvens, ut in tertio. In primo & secundo casu æquatio quarti gradus dicitur plana, *& in duas secundi gradus divisibilis est, ut vidimus. In tertio casu æquatio vere & proprie quarti gradus dicitur, & a nonnullis* affectionem cubicam *continere. Problema autem, ad quod solvendum ordinatur, dicitur* solidum, *quod non per regulam & circinum, sed per aliquam sectionem Conicam, cujus ope radices exhibentur, construi tantummodo potest.*

PROPOSITIO III.

An biquadraticæ, quæ quatuor radicibus imaginariis constant, resolvi possint.

CUm certum sit, biquadraticas, quæ duas radices reales & duas imaginarias habent, resolvi posse, ex eo quod tunc earum cubica derivata unam realem, & duas imaginarias radices contineat, adeoque solubilis sit *per Propos.* 4. *Cap.* 9.; cum tamen biquadratica quatuor imaginariis radicibus constat, tunc omnes ejus cubicæ derivatæ radices reales fiunt, proinde oritur dubium, an in eo casu resolvi valeat.

I. Sit igitur æquatio $x^4 + x^2 + 2x + 6 = 0$. Comparentur hujus termini cum terminis formulæ generalis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, erit $p = 1$, $q = 2$, $r = 6$, & ejus cubica derivata $y^6 + 2y^4 - 23y^2 - 4 = 0$ *per Cor.* 1. *Prop.* 1. *hujus*. Hæc si dividatur per $yy - 4$, nihil remanet, proinde $y = 2$: quo valore una cum valoribus p & q in duabus

bus componentibus *per Cor.* 2. *Prop. cit.* fiunt $x^2 - 2x + 3 = 0$, & $x^2 + 2x + 2 = 0$, earumque radices, ut ex signis patet, sunt imaginariæ; nempe $1 + \sqrt{-2}$, $1 - \sqrt{-2}$, & $-1 + \sqrt{-1}$, $-1 - \sqrt{-1}$.

II. Sit æquatio $x^4 + 70x^2 - 3744x + 27993 = 0$, comparatis terminis cum terminis formulæ generalis ut supra, invenitur ejus cubica derivata *per Coroll.* 1. *Prop.* 1. *bujus* $y^6 + 140y^4 - 107072y^2 - 14017536 = 0$, & dividendo illam per $yy - 324$, cum divisio exacte fiat, erit $yy = 324$, & $y = 18$; quo valore in duabus componentibus posito *per Coroll.* 2. *Prop. cit.* fiunt $x^2 - 18x + 93 = 0$, & $x^2 + 18x + 301 = 0$; ex quibus quatuor radices imaginariæ prodeunt, $9 + \sqrt{-12}$, $9 - \sqrt{-12}$, $-9 + \sqrt{-220}$, $-9 - \sqrt{-220}$.

Coroll. I. *Atque hinc patet, biquadraticas, quæ quatuor radicibus imaginariis constant, sortiri posse cubicam derivatam, quæ radicem aliquam realem & rationalem contineat, quæ quidem vel per aliquem divisorem, vel per extractionem radicis ex binomio cubico obtineatur, tunc vero tam ipsam, quam biquadraticam optime posse resolvi. Quanquam biquadratica ejusmodi ad problematis solutionem, ad quod erat ordinata, inepta sit, cum nulla radix realis ad illud construendum assignari valeat, ut Cartesius advertit.*

Coroll. II. *At generatim si cubica derivata talis sit, ut tres radices reales irrationales contineat, ita ut* casum irreductibilem *involvat, de quo* in Schol. 3. Prop. 9. Cap. 9. *tunc neque ipsa, neque biquadratica solvi poterunt, cum omnis æquationum quarti gradus resolutio a cubicæ derivatæ solutione maxime pendeat, eique tanquam fundamento innitatur.*

PRO-

PROPOSITIO IV.

Æquationes quarti gradus alia ratione resolvere.

Alia quoque methodus æquationes biquadraticas resolvendi, & illas in duas planas secundi gradus dividendi, si divisibiles sint, excogitata fuit a Cl. Huddenio; quæ insuper id habet commodi, ut si adsit secundus terminus, nihil obstet.

Sit æquatio generalis repræsentans omnes æquationes quarti gradus, etiam secundo termino præditas

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

Dividatur in duas partes, ita ut altera contineat $x^4 + px^3$, altera $x^2 + rx + s$, utraque scilicet parium dimensionum potestates x^4 & x^2, erit

$$x^4 + px^3 = -qx^2 - rx - s$$

Ut prima pars quadratum fiat, ponatur radix $x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{2}y$, ejus quadratum erit

$$\begin{aligned} x^4 + px^3 + \tfrac{1}{4}p^2x^2 &+ \tfrac{1}{2}pyx + \tfrac{1}{4}yy \\ + yx^2 & \end{aligned}$$

Quod quidem alteri quoque æquationis parti addatur, omissis $x^4 + px^3$, cui æqualis supponitur $-qx^2 - rx - s$; ita ut loco $x^4 + px^3 = -qx^2 - rx - s$ habeatur

$$\begin{aligned} x^4 + px^3 + \tfrac{1}{4}p^2x^2 + \tfrac{1}{2}pyx + \tfrac{1}{4}yy &= -qx^2 - rx - s \\ yx^2 \qquad\qquad & \quad \tfrac{1}{4}p^2x^2 + \tfrac{1}{2}pyx + \tfrac{1}{4}yy \\ & \quad yx^2 \end{aligned}$$

 Cum

Cum igitur prima pars ſit quadratum, altera quoque pars quadrato æquari debet. Ponatur hujus radix eſſe $vx + z$, ejus quadratum erit $vvx^2 + 2vzx + zz$; utque habeantur valores v & z, fiat terminorum comparatio, erit

$$vv = \tfrac{1}{4}pp - q + y, \ \& \ v = \sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y}$$

$$2vz = \tfrac{1}{2}py - r, \ \& \ z = \frac{\tfrac{1}{2}py - r}{2v}, \text{ hoc eſt}$$

$$z = \frac{\tfrac{1}{2}py - r}{2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y}}.$$ Proinde radix $vx + z$, erit

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y} \times x + \frac{\tfrac{1}{2}py - r}{2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y}},$$ cujus quadratum

$$\overline{\tfrac{1}{4}pp - q + y} \times xx + \overline{\tfrac{1}{2}py - r} \times x + \frac{\tfrac{1}{4}ppyy - pry + rr}{pp - 4q + 4y}$$

Comparando jam hujus quadrati terminos cum terminis quadrati ſecundæ partis præcedentis æquationis, deſtruuntur termini ſimiles, & remanet

$$\frac{\tfrac{1}{4}ppyy - pry + rr}{pp - 4q + 4y} = \tfrac{1}{4}yy - s$$

Factaque multiplicatione, & ordinata æquatione, oritur cubica generalis

$$\begin{aligned} y^3 - qyy - 4sy - pps &= 0 \\ + pry + 4qs & \\ - rr & \end{aligned}$$

Cujus valoribus p, q, r, s per coefficientes æquationis ſpecialis

cialis datæ determinatis, quæritur valor ipsius y. Quo invento, si rationalis sit, poterunt ejusdem ope determinari duæ sequentes æquationes secundi gradus, quæ ex æqualium quadratorum radicibus componuntur, & per illas æquatio proposita dividi, ut quæ inferius sequuntur exempla, rem ostendunt.

$$x^2 + \tfrac{1}{2}px + \sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y} \times x + \tfrac{1}{2}y + \frac{\tfrac{1}{2}py - r}{2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y}} = 0$$

$$x^2 + \tfrac{1}{2}px - \sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y} \times x + \tfrac{1}{2}y - \frac{\tfrac{1}{2}py - r}{2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y}} = 0$$

I. Data sit æquatio $x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$, erit $p = -1$, $q = -3$, $r = 1$, $s = 2$, quibus valoribus in cubica generali positis, fit $y^3 + 3y^2 - 9y - 27 = 0$, quæ si dividatur per $y + 3$ nihil remanet; est ergo $y = -3$, qui valor, cum sit rationalis, indicio est, æquationem datam in duas secundi gradus esse divisibilem. Ponatur igitur hic valor una cum valoribus p, q, r in duabus præcedentibus secundi gradus, eruitur ex prima $x^2 - 1 = 0$, ex altera $x^2 - 1x - 2 = 0$, & per utranque æquatio data dividi potest, ut patet.

II. Sit Cartesii æquatio a nobis allata *in Propos. præc.* $x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0$. Erit $p = 0$, $q = -17$, $r = -20$, $s = -6$; & per hos valores cubica generali determinata, invenitur $y^3 + 17y^2 + 24y + 8 = 0$, quæ si dividatur per $x + 1$, nihil remanet. Est ergo $y = -1$, & hoc valore in duabus secundi gradus substituto, inveniuntur $x^2 + 4x + 2 = 0$, & $x^2 - 4x - 3 = 0$, omnino ut antea per Cartesii regulam.

Coroll. *Si valor ipsius y ex cubica inventus non sit rationalis, æquatio proposita quarti gradus non erit divisibilis in duas secundi gradus, sed problema erit solidum.*

Schol. *Cum præclaræ hujus methodi artificium* Huddenius *nobis occultum reliquerit, illud* Antonii de Monforte *solertia detexit* ([a]). *Quod & nos, paucis mutatis, hoc loco referre in laudem Cl. Viri de Mathesi optime meriti, æquum duximus.*

PROPOSITIO V.

Æquationem biquadraticam puram, vel secundo & quarto termino carentem solvere.

I. Sit æquatio biquadratica pura $x^4 = q$, vel $x^4 = -q$; extrahatur primo radix quadrata, erit $x^2 = \sqrt{q}$, vel $x^2 = \sqrt{-q}$. Deinde iterum extrahatur eadem radix, & habebitur $x = \sqrt{\sqrt{q}}$, vel $x = \sqrt{\sqrt{-q}}$. Sit ex. gr. $x^4 = 50$, erit $x^2 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, extractaque rursus radice, erit $x = \sqrt{5\sqrt{2}}$.

II. Si in æquatione biquadratica, præter secundum terminum, desit etiam quartus (sæpe fit, ut auferendo secundum terminum, quartus quoque evanescat) ut $x^4 - 6x^2 - 4 = 0$, facile erit eam resolvere ut derivativam secundi gradus *per Prop.* 4. *Cap.* 8.

Coroll. *Omnes ergo biquadraticæ, quæ primum & ultimum terminum tantum habent, vel quæ termino secundo,*

(a) Tract. de Probl. determinat. Neap. 1690.

do, & quarto carent, ab omni affectione cubica sunt immunes, & in duas secundi gradus dividi possunt.

SCHOL. Raphael Bombelli ([a]) *Bononiensis anno* 1579. *æquationes biquadraticas resolvendi methodum in sua Algebra tradidit, sed* a Ludovico *Ferrariensi eam accepisse ferunt. Quicquid sit, Italorum hominum ingenium & gloria fuit hucusque progredi* ([b]). *Post* Vietam Cartesius *nova sua methodo mirum quantum illam illustraverit, quem deinde secuti sunt ducem quotquot de Analysi scripserunt. Ceterum majores nostri ultra æquationes biquadraticas non sunt progressi, summam rei difficultatem prospicientes. Recentiores aliqui generalem æquationes quascunque resolvendi methodum tradiderunt; non advertentes fortasse eam methodum inutilem jure censeri, quæ immensum (quod ipsi fatentur) & inexplicabilem fere calculum postulat. Nos duntaxat de reductione æquationum quarti, quinti, & sexti gradus paulo post agemus: quæ si reducibiles sint, facile possunt per ea, quæ de cubicis & biquadraticis diximus, resolvi. Sin autem reduci non poterunt, saltem constabit, problema, ad quod illæ ordinantur, esse solidum, & nonnisi per sectiones Conicas resolvendum. Sed tyronum studio obsequentes, nonnulla quarti gradus problemata ad eorum ingenii exercitationem præmittimus.*

PRO-

(a) Algebra lib. 2. pag. 353. Wallisii Algeb. cap. LV. pag. 229. (b) Histoire de l'Acad. Royale des scien. an. 1705. pag. m. 103.

PROBLEMATA QUARTI GRADUS.

PROBL. I.

Numerum datum in duos ita dividere, ut eorum quadrata inter se multiplicata producant numerum æqualem numero dato c.

Esto numerus datus dividendus $= 2a$, & partium differentia $= 2x$, erit pars major $a + x$, minor vero $a - x$ *per Theor.* 3. *Prop.* 3. *Cap.* 5. Et ex conditione problematis habetur

$$\overline{a+x}^2 \times \overline{a-x}^2 = c$$
$$x^4 - 2a^2x^2 + a^4 = c$$

Brevitatis gratia, ut quantitates a & c determinentur, pono $2a = 14$, & $c = 2304$; erit æquatio, & quidem derivativa secundi gradus, facile resolvenda *per Prop.* 4. *Cap.* 8.

$$x^4 - 98x^2 + 2401 = 2304$$
$$x^4 - 98x^2 = -97$$
$$\textit{adde} \quad 2401 \quad 2401$$
$$x^4 - 98x^2 + 2401 = 2304$$

Extr. rad. $x^2 - 49 = \pm\sqrt{2304} = \pm 48$
$$x^2 = 49 - 48 = \sqrt{1}$$
$$x = 1$$

Unde

Unde $a+x=8$, & $a-x=6$, quorum quadratis invicem multiplicatis æquatur $c=2304$.

PROBL. II.

Invenire quatuor numeros in continua proportione Arithmetica, qui inter se multiplicati faciant numerum a.

Pone numerum datum $a=100$, & terminorum differentiam $=d$. Sit primus terminus x, erit secundus $x+d$, tertius $x+2d$, & quartus $x+3d$ *per Sch.* 1. *Propos.* 3. *Cap.* 5. quibus invicem multiplicatis, habetur æquatio

$$x^4+6dx^3+11d^2x^2+6d^3x-100=0$$

Inventis autem *per Prop.* 9. *Cap.* 1. ultimi termini divisoribus 1, 2, 4, 5 &c. tentetur divisio per $x\pm1$, $x\pm2$, $x\pm4$ &c. quæ non succedit sine residuo. Tollatur secundus terminus æquationis *per Prop.* 5. *Cap.* 7. Quamobrem fiat $x=z-\frac{3}{2}d$, æquatio transformabitur in sequentem derivativam secundi gradus, quæ secundo & tertio termino caret, nempe

$$z^4 * -\tfrac{5}{2}d^2z^2 * +\tfrac{9}{16}d^4-100=0$$

Proinde si ponatur $d=1$, erit

$$z^4-\tfrac{5}{2}z^2=99\tfrac{7}{16}$$

adde $\frac{25}{16}$ $\frac{25}{16}$

Extr. rad. $z^4-\frac{5}{2}z^2+\frac{25}{16}=101$

$z^2-\frac{5}{4}=\sqrt{101}$ *Extr.*

Extr. rad. $z^2 = \frac{5}{4} + \sqrt{101}$

$$z = \sqrt{\tfrac{5}{4} + \sqrt{101}}$$

Sed posita fuit $x = z - \frac{3}{2}d$, erit ergo primus terminus quæsitus $x = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} - \frac{3}{2}$, secundus $x + d = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} - \frac{1}{2}$, tertius $x + 2d = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} + \frac{1}{2}$, quartus $x + 3d = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} + \frac{3}{2}$. Factum ex primo & quarto est $-1 + \sqrt{101}$, factum vero ex secundo & tertio est $+1 + \sqrt{101}$ *per num.* 4. *Propos.* 12. *Cap.* 4. Atque hinc $\overline{-1 + \sqrt{101}} \times \overline{+1 + \sqrt{101}} = 100$.

Sit iterum $a = 100$, $d = 2$, æquatio superior fiet $z^4 - 10z^2 - 91 = 0$, seu

$$z^4 - 10z = 91$$

adde $\quad 25 \quad 25$

$$z^4 - 10z + 25 = 116$$

Extr. rad. $z^2 - 5 = \sqrt{116}$

$$z^2 = 5 + \sqrt{116}$$

$$z = \sqrt{5 + \sqrt{116}}$$

Sed $x = z - \frac{3}{2}d$, ergo primus terminus proportionalis erit $x = \sqrt{5 + \sqrt{116}} - 3$, secundus $x + d = \sqrt{5 + \sqrt{116}} - 1$, tertius $x + 2d = \sqrt{5 + \sqrt{116}} + 1$, quartus $x + 3d = \sqrt{5 + \sqrt{116}} + 3$. Proinde factum ex primo & quarto

to eſt $-4+\sqrt{116}$, factum vero ex ſecundo & tertio $+4+\sqrt{116}$ *per Propoſ. citat.*, adeoque $\overline{-4+\sqrt{116}}$ $\times \overline{+4+\sqrt{116}} = 116 - 16 = 100$.

PROBL. III.

Tres numeros invenire, quorum quadrata ſint harmonice proportionalia.

Sit quæſitorum primus 1, ſecundus x, tertius $x+1$, eorumque quadrata $1, xx, x^2+2x+1$: quæ cum ſint ex hypotheſi harmonice proportionalia, erit maximum ad minimum, ut differentia maximi & medii ad differentiam medii & minimi, nimirum

$$x^2+2x+1 \,.\, 1 :: 2x+1 \,.\, xx-1$$

Et multiplicatis mediis & extremis, habetur

$$x^4+2x^3-2x-1=2x+1$$
$$x^4+2x^3-4x-2=0$$

Quæ quidem æquatio cum per nullum binomium diviſibilis ſit, tentanda eſt ſolutio *per Propoſ. 3. hujus*.

Sit igitur $p=2$, $q=0$, $r=-4$, $s=-2$, poſitiſque his valoribus in cubica generali, oritur $y^3-8=0$, hoc eſt $y=2$. Quo valore una cum valoribus p, r, s ſubſtituto in duabus ſecundi gradus æquationibus, fiunt

$$x^2 \begin{matrix}+1x\\+\sqrt{3}\end{matrix} +1+\frac{3}{\sqrt{3}}=0, \quad \& \quad x^2 \begin{matrix}+1\\-\sqrt{3}\end{matrix} +1-\frac{3}{\sqrt{3}}=0$$

 Cum

Cum autem ex neutra habeatur radix, quæ numeris explicari possit, ut evidens est, aliam viam, quam Jacobus de Billy ([a]) innuit ex Diophanti methodo, ingredimur, & est hujusmodi.

Inveniantur duo numeri quadrati tales, ut eorum differentia addita majori faciat quadratum. Ponantur, ut supra, quadrata x^2+2x+1, & xx, quorum differentia $2x+1$ addita majori, fit x^2+4x+2. Cum autem hæc summa debeat æquari quadrato, si pro ejus latere sumatur $x-2$, erit $x^2-4x+4=x^2+4x+2$; & sublatis utrinque terminis similibus, habetur $x=\frac{1}{4}$, quo valore in duobus quadratis assumptis posito, erunt $\frac{25}{16}$ & $\frac{1}{16}$, seu in integris 25 & 1, quorum differentia 24 majori quadrato addita facit quadratum 49, ut patet. Jam igitur numeri quadrati harmonice proportionales ab initio positi 1, xx, x^2+2x+1 erunt 1, xx, $25xx$; adeoque $25xx . 1 :: 24xx . xx-1$, & multiplicatis tum mediis, tum extremis, oritur $25x^4-25x^2=24x^2$, seu $25x^2=49$, hoc est $x^2=\frac{49}{25}$, & $25x^2=\frac{1225}{25}$, proinde numeri quæsiti sunt 1, $\frac{49}{25}$, & $\frac{1225}{25}$, vel in integris 25, 49, 1225.

Coroll. *Si pro quadrati latere* $x-2$, *ponatur* $x-3$, *vel* $x-4$ *&c. invenientur alii atque alii in infinitum tres numeri quadrati harmonice proportionales, ut supra.*

Schol. *Duo hic notent tyrones: 1.° Hujus problematis solutionem ab ea conditione necessario pendere, ut duorum quadratorum, quæ assumuntur, differentia majori quadrato addita quadratum efficiat; 2.° Non esse omnino desperandum de solutione problematis, quæ primo impossibilis videatur. Nam si nequit per unam methodum, per aliam sæpe satis commode expeditur.* PROBL.

([a]) Diophanti Redivivi p. 2. probl. xvi.

PROBL. IV.

In rectangulo datis area & diametri aggregato, & differentia laterum, invenire latera, diametrum, & aream. Fig. 8.

Sit areæ & diametri summa $= a$, differentia laterum $= 2d$, quæsitorum eorundem laterum summa $= 2x$, erit latus minus $AB = x - d$, majus vero $BC = x + d$ *per Theor.* 3. *Propos.* 3. *Cap.* 5. & ex eorum facto innotescit rectanguli BD area $= x^2 - d^2$, quæ si auferatur ex summa data $= a$, prodit diameter $AC = a - x^2 + d^2$.

Cum igitur sit $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ *per Propos.* 47. *lib.* 1. *Eucl.*, erit in terminis analyticis

$$\overline{a - x^2 + d^2}^2 = \overline{x + d}^2 + \overline{x - d}^2$$

$$a^2 - 2ax^2 + 2ad^2 + x^4 - 2d^2x^2 + d^4 = 2x^2 + 2d^2$$

$$\begin{aligned} x^4 & - 2d^2x^2 = 2d^2 - 2ad^2 - d^4 - a^2 \\ & - 2ax^2 \\ & - 2x^2 \end{aligned}$$

Et si ponatur $a = 58$, $d = 1$, æquatio determinabitur, nempe

$$x^4 - 120x^2 = -3479$$

Prop. 4. *Cap.* 8. $\quad 3600 \qquad 3600$

$$x^4 - 120x^2 + 3600 = 121$$

Extr. rad. $\quad x^2 - 60 = \pm\sqrt{121}$

$$x^2 = 60 - 11 = 49$$

Extr. rad. $\quad x = 7$

Erit

Erit ergo latus minus $x - d = 6$, majus $x + d = 8$, & area rectanguli $= 48$, quæ detracta ex aggregato areæ & diametri a ($= 58$) relinquit diametrum $= 10$, ut evidens est.

PROBL. V.

Data summa laterum trianguli, dataque ratione summæ quadratorum, quæ fiunt a lateribus, ad aream ejusdem trianguli, reperire latera. Fig. 9.

Pone summam laterum datam $= 2a$, atque hinc sume basim $AB = b$, erit aggregatum reliquorum $AC + CB = 2a - b$. Esto ex illis unum $AC = x$, erit aliud $2a - b - x$. Ratio vero summæ quadratorum ad trianguli aream ponatur ut m ad n, sive 8 ad 1.

Ut inveniatur trianguli ipsius area, subtrahe ex semisumma laterum $= a$ singula trianguli ejusdem latera, erunt tres differentiæ $a - b$, $a - x$, $-a + b + x$, ex quarum facto ducto in semisummam laterum obtinetur trianguli area per ea, quæ diximus *in Problem.* 4. *Cap.* 8. nempe

$\sqrt{-a^4 + 2a^3b + 2a^3x - 3a^2bx - a^2x^2 - a^2b^2 + ab^2x + abx^2}$, quam voco g.

Summa vero quadratorum ex lateribus ejusdem trianguli erit

$2x^2 + 2bx - 4ax + 2b^2 - 4ab + 4a^2$, quam voco f.

Est autem ex conditione problematis

$$f \cdot g :: m \cdot n$$

Th. 6. *Prop.* 3. *Cap.* 5. $\quad f^2 \cdot g^2 :: m^2 \cdot n^2$

Theor. 4. *Prop. cit.* $\quad f^2 \times n^2 = g^2 \times m^2$

Posi-

Positis proinde valoribus m^2, n^2, f^2 & g^2, factaque de more reductione, oritur æquatio

$$\begin{aligned} x^4 - 4ax^3 + 24a^2x^2 - 40a^3x - 40a^3b &= 0 \\ + 2bx^3 - 24abx^2 + 62a^2bx + 24a^2b^2 & \\ + 3b^2x^2 - 24ab^2x - 4ab^3 & \\ + 2b^3x + 20a^4 & \\ + b^4 & \end{aligned}$$

Jam si ponatur $a = 6$, & $b = 3$, prodit eadem æquatio determinata $x^4 - 18x^3 + 459x^2 - 3186x + 7209 = 0$.

Hæc autem cum per nullum binomium dividi possit sine residuo, quærenda est, sublato secundo termino, ejus solutio *per Prop. 2. vel 3. hujus*.

Quod si manentibus, ut prius, $a = 6$, $b = 3$, fiat $m . n = 8\frac{1}{3} . 1$, seu $m . n = 25 . 3$, eademque methodo procedatur, invenietur æquatio determinata

$$x^4 - 18x^3 + 483\tfrac{1}{2}x^2 - 3622\tfrac{1}{2}x + 7650 = 0$$
$$1. \quad 4. \quad 16. \quad 64. \quad 256.$$
$$z^4 - 72z^3 + 7736z^2 - 231840z + 1958400 = 0$$

Quæ si dividatur per $z - 16$, nihil remanet; est ergo $z = 16$. Sed ob progressionem Geometricam quadruplam, qua multiplicatæ sunt radices prioris æquationis, erit $4x = z$, seu $4x = 16$, & $x = 4$. Proinde latus quæsitum $AC = 4$.

PROBL.

PROBL. VI.

Datis quadrato AC, *&* *recta* M, *producere latus* DC *in* E, *ita ut ex angulo* A *ducta* AE, *pars intercepta* EF *æqualis sit data* M. Fig. 24.

Sit AB, vel $BC = a$, $BF = x$, erit $FC = a - x$. Sit M (ex hypothesi $= FE$) $= c$. Ob triangula similia CFE, & AFB, erit CF $(a - x)$. FE (c) :: FB (x) . AF $\frac{cx}{a - x}$. Et ob triangulum ABF rectangulum est $\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BF}^2$, hoc est $\frac{ccxx}{aa - 2ax + xx} = aa + xx$; atque hinc oritur

$$x^4 - 2ax^3 + 2aax^2 - 2a^3x + a^4 = 0.$$
$$- ccx^2$$

Ut tollatur secundus terminus, fiat $x - \frac{1}{2}a = z$, oritur

$$z^4 \; * \; + \frac{1}{2}aaz^2 - a^3z + \frac{5}{16}a^4 = 0$$
$$- ccz^2 - accz - \frac{1}{4}aacc$$

Invenienda modo est ejus cubica derivata *per Prop.* 1. *hujus ejusque Coroll.* proinde necesse est nosse, an termini hujus biquadraticæ sint cum signo +, vel —. Quod ex ipsis dati problematis conditionibus expiscari debemus; hoc est videndum, an $a > c$, vel contra $c > a$. Certum est FE $(= M)$ esse $> AB$, vel BC; adeoque $c > a$, item $cc > aa$, & multo magis $cc > \frac{1}{2}aa$. Igitur tertius æquationis datæ terminus est negativus, nempe $\frac{1}{2}aa - cc = -p$. Similiter $-a^3 - acc = -q$. Demum quia $cc > aa$, erit

cc >

$cc > \frac{5}{4}aa$, & multiplicando utrinque per aa, erit $aacc > \frac{5}{4}a^4$, & $\frac{1}{4}aacc > \frac{5}{16}a^4$, unde ultimus terminus est negativus, nempe $\frac{5}{16}a^4 - \frac{1}{4}aacc = -r$. Omnes ergo biquadraticæ termini sunt cum signo $-$. Nimirum $2p = aa - 2cc$, $p^2 - 4r = -a^4 + c^4$, $-q^2 = -a^6 - 2a^4cc - aac^4$. Quibus in cubica generali derivata positis, habetur *per Prop. cit.*

$$\begin{aligned} y^6 + aay^4 - a^4y^2 - a^6 &= 0 \\ - 2ccy^4 + c^4y^2 - 2a^4cc & \\ - aac^4 & \end{aligned}$$

Jam videndum, an hæc divisibilis sit per aliquem ultimi termini divisorem sine residuo. Divisores sunt a, aa, $aa + cc$, $a^3 + acc$ *per Prop.* 9. *Cap.* 1. Divisio tentari potest per $yy - aa$, vel $yy - aa - cc$. Et quidem dividendo per hunc secundum, nihil remanet. Quotus autem est $y^4 - ccy^2 + 2aay^2 + a^4 + aacc = 0$, unde patet cubicam derivatam conflari ex duabus æquationibus, una secundi, altera quarti gradus. At nobis satis est æquatio secundi gradus $yy - aa - cc = 0$, unde habemus valorem ipsius y, hoc est $y = \pm\sqrt{aa + cc}$, qui valor substituendus est in his duabus indeterminatis secundi gradus *per Prop.* 1. *hujus* cum notis & observationibus *Schol.* 1. & 2.

1.ª $\quad z^2 + yz + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$

2.ª $\quad z^2 - yz + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0$

Substituto valore ipsius y, cum valoribus p & q, erit

1.ª

$$1.^a \quad z^2 - z\sqrt{aa+cc} + \tfrac{3}{4}aa - \frac{a^3 - acc}{2\sqrt{aa+cc}} = 0$$

$$2.^a \quad z^2 + z\sqrt{aa+cc} + \tfrac{3}{4}aa + \frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa+cc}} = 0$$

Multiplicando autem tam numeratorem, quam denominatorem fractionis $\frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa+cc}}$ per $\sqrt{aa+cc}$ remanet idem valor, & prodit $\frac{a^3\sqrt{aa+cc} + acc\sqrt{aa+cc}}{2aa+2cc}$; & dividendo hanc per $aa+cc$, erit $\frac{a\sqrt{aa+cc}}{2}$, seu $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$, quæ ponenda est in duabus illis secundi gradus loco ipsius $\frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa+cc}}$, adeoque fiunt

$$1.^a \quad z^2 - z\sqrt{aa+cc} + \tfrac{3}{4}aa - \tfrac{1}{2}a\sqrt{au+cc} = 0$$

$$2.^a \quad z^2 + z\sqrt{aa+cc} + \tfrac{3}{4}aa + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} = 0$$

Ex utraque obtinetur duplex valor ipsius z *per Propos.* 1. *Cap.*8. si disponantur termini, ut moris est, & addatur utrinque quadratum semicoefficientis secundi termini. Sic ex priori

$$z^2 - z\sqrt{aa+cc} + \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc = -\tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$$

Extracta radice secunda, habetur duplex valor, nempe

$$z = \tfrac{1}{2}\sqrt{aa+cc} \pm \sqrt{-\tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$$

Et

Et quia positum fuit $x - \frac{1}{2}a = z$, adeoque $x = z + \frac{1}{2}a$, si valori invento ipsius z addatur $+ \frac{1}{2}a$, habebitur valor ejusdem x, qui maxime quærebatur, nimirum

$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$$

Qui duo valores ipsius x dant longitudinem quæsitam BF; & sunt iidem, qui nobis a Cartesio ([a]) paucissimis verbis indicantur, sed tyronibus ob multiplicem Asymmetriam non ita facile occurrunt.

Schol. I. *Breviorem aliam præclari hujus problematis solutionem, quæ secundi gradus æquationem non excedit, trademus inferius, ubi de Geometrica æquationum constructione* Cap. 12. *agetur*.

Schol. II. *Si loco quadrati detur rectangulum* ABCD, *ex cujus angulo* A *ducenda sit recta æqualis datæ* M, *ut supra, tunc problema esset solidum. Sit enim* $AB = a$, $BC = b$, $EF = c$, & $BF = x$, *erit* $CF = b - x$; *ob triangula* CFE, BFA *similia* $AF = \frac{cx}{b - x}$, & $\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BF}^2$, hoc est $\frac{ccxx}{b^2 - 2bx + x^2} = aa + xx$, *unde prodit biquadratica priori similis, sed quæ nullo modo divisibilis est in duas secundi gradus, adeoque in problema solidum transit*. *Hinc* Pappus Alexandrinus ([b]) *hoc ipsum problema resolvit per hyperbolam intra Asymptotos, & Circulum*.

DEFINITIONES.

I. Omnis æquatio composita *Reducibilis* dicitur, quæ per æquationes inferioris gradus exacte dividi,

Nn & ad

(a) Geomett. lib. 3. pag. 83. (b) Mathemat. Collect. lib. 4. Prop. 31.

& ad inferiorem gradum deprimi potest. Sic æquatio quinti gradus, quæ dividi potest exacte per duas æquationes inferiores, alteram secundi & alteram tertii gradus, dicitur *Reducibilis*.

2. Æquatio composita, quæ per nullam æquationem inferioris gradus est divisibilis, dicitur *Irreducibilis*. Ut æquatio sexti gradus, quæ nec per duas æquationes, unam secundi, alteram quarti gradus, nec item per duas tertii gradus dividi exacte potest, dicitur *Irreducibilis*.

Schol. *Reductio, de qua hic agimus, eo tendit, ut dignoscatur, an data æquatio deprimi possit ad gradum inferiorem: quod fiet, si illa sit exacte divisibilis in alias æquationes inferioris gradus. Sic ex. gr. æquatio quinti gradus deprimitur ad unam cubicam & alteram secundi gradus, si exacte valeat in illas duas dividi. Sine hac doctrina haud satis distingueretur natura æquationum & problematum, unde ipsæ æquationes oriuntur. Nam problemata inferioris gradus facile confunderentur cum iis, quæ sunt superioris ordinis, & horum instar resolverentur, quod est absurdum. Utimur autem methodo generali & pulcherrima; digna sane, cui tyrones satis diligenter incumbant.*

PROPOSITIO VI.

An Æquatio biquadratica reducibilis sit, explorare.

Sit æquatio quarti gradus indeterminata, & generalis omnes alias repræsentans $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$, quæri-

quæritur an dividi possit exacte in duas alias secundi gradus, & quænam illæ sint.

Concipiatur illa orta ex duabus indeterminatis secundi gradus $x^2+fx+g=0$, & $x^2+hx+i=0$, quæ si invicem multiplicentur, oritur æquatio priori æqualis, nempe

$$\begin{array}{l} x^4+fx^3+gx^2+ghx+ig=0 \\ \quad +hx^3+fhx^2+ifx \\ \qquad\quad +ix^2 \end{array}$$

Comparentur termini utriusque æquationis, & fiant æquationes particulares, erit

1.^{a} $f+h=p$, 2.^{a} $g+fh+i=q$, 3.^{a} $gh+if=r$, 4.^{a} $ig=s$.

Sumatur ex prima valor h, erit $h=p-f$, & ex quarta valor $i=\frac{s}{g}$, qui duo valores substituantur in tertia æquatione loco h & i; fiet $pg-fg+\frac{fs}{g}=r$, & multiplicando per g, erit $pgg-fgg+fs=rg$, hoc est $fs-fgg=rg-pgg$; unde habetur $f=\frac{rg-pgg}{s-gg}$.

Cujus valor, ut plane innotescat, innotescere debet g. Est autem ex quarta æquatione $ig=s$; proinde g est unus ex divisoribus ultimi termini cogniti s, quo cum signo $+$ vel $-$ dividi potest exacte ultimus terminus s. Tentandi sunt igitur sub utroque signo $\pm$ singuli divisores, ut docuimus *Propos.* 1. *Cap.* 7. Sed exemplo res illustrabitur.

I. Sit æquatio data $x^4-4x^3-10x^2-28x-8=0$ erit $p=-4$, $q=-10$, $r=-28$, $s=-8$. Ut inve-

inveniatur quantitas g, tentandi sunt omnes divisores ultimi termini -8 sub utroque signo, nempe ± 1, ± 2, ± 4, ± 8. Ponatur primo esse $g = 1$, erit ex superiori formula $f = \frac{-28 + 4}{-8 - 1} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$. Item $h = -4 - \frac{8}{3} = -\frac{20}{3}$, & $i = -8$. His autem valoribus positis in duabus indeterminatis $x^2 + fx + g = 0$, & $x^2 + hx + 1 = 0$, fiunt $x^2 + \frac{8}{3}x + 1 = 0$, & $x^2 - \frac{20}{3}x - 8 = 0$, per quas si dividatur æquatio data $x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 28x - 8 = 0$, divisio exacte non succedit. Non est igitur $g = 1$, ut fuit suppositum.

Neque item divisio succedit, si ponatur $g = -1$, vel $g = +2$, vel $g = -2$, bene tamen si ponatur $g = 4$; tunc enim erit $f = 2$, $h = -6$, & $i = -2$. Quibus valoribus in duabus illis æquationibus secundi gradus substitutis, habentur $x^2 + 2x + 4 = 0$, & $x^2 - 6x - 2 = 0$, per quas æquatio data exacte dividitur, ejusque radices ex resolutione duarum illarum secundi gradus facile obtinentur *per Propos.* 2. *Cap.* 8. nempe $x = -1 \pm \sqrt{-3}$, & $x = 3 \pm \sqrt{11}$.

II. Sit æquatio $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0$, ea ipsa, quam Newtonus in Arithm. Univers. etiam per *Divisores surdos* resolvit. Concipiatur orta ex duabus illis indeterminatis secundi gradus $x^2 + fx + g = 0$, & $x^2 + hx + i = 0$. Inventum jam fuit supra $f = \frac{rg - pgg}{s - gg}$, $h = p - f$, $i = \frac{s}{g}$. Comparatis autem æquationis datæ terminis cum formula generali, habetur $p = -1$, $q = -5$,

$r = 12$,

$r = 12$, $s = -6$; & ultimi termini (-6) divisores, ex quibus g (ob $ig = s$) est unus, sunt $1, 2, 3, 6$, qui ponantur singulatim in superiori formula loco g cum signo $\pm$. Et cum frustra adhibeantur ± 1, ± 2, pono ipsum $g = 3$; unde $f\left(= \frac{rg - pgg}{s - gg}\right) = \frac{36 + 9}{-6 - 9} = \frac{45}{-15} = -3$: item $h\ (= p - f) = -1 + 3 = 2$; & $i\left(= \frac{s}{g}\right) = \frac{-6}{3} = -2$. Per hos valores determinatis duabus secundi gradus æquationibus, habetur $x^2 - 3x + 3 = 0$, & $x^2 + 2x - 2 = 0$, quæ æquationem datam exacte dividunt, earumque radices $x = 1\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$, & $x = -1 \pm \sqrt{3}$ quatuor æquationis datæ radices exhibent.

COROLL. *Substitutis ipsarum* f, g, h, *&* i *valoribus in duabus illis secundi gradus æquationibus, si æquatio data per neutram possit exacte dividi, signum est, eam esse irreducibilem. Tunc autem ejus solutio quærenda est* per Prop. 2. hujus, *cum ex natura sua biquadratica sit: quemadmodum cubicas quæ deprimi nequeunt ad gradum inferiorem, per* Cardani *regulas solvimus*.

PROPOSITIO VII.

An Æquatio quinti gradus reducibilis sit, inquirere.

Sit æquatio generalis repræsentans omnes quinti gradus æquationes $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$, quæritur an exacte dividi possit in alias duas inferioris gradus, alteram scilicet secundi, alteram tertii gradus, &

quæ-

quænam sint tales æquationes. Supponantur illæ duæ æquationes esse $x^2+fx+g=0$, & $x^3+bx^2+ix+l=0$, ex quarum facto habetur æquatio priori ex hypothesi æqualis, nempe

$$\begin{array}{l} x^5+fx^4+ix^3+lx^2+flx+gl=0 \\ \quad +bx^4+gx^3+gbx^2+gix \\ \qquad +fbx^3+fix^2 \end{array}$$

Comparatis terminis, habentur quinque æquationes: 1.^{a} $f+b=p$, 2.^{a} $i+g+fb=q$, 3.^{a} $l+gb+fi=r$, 4.^{a} $fl+gi=s$, & 5.^{a} $gl=t$.

Ex prima æquatione habetur $b=p-f$, & ex secunda $b=\frac{q-i-g}{f}$; erit ergo $p-f=\frac{q-i-g}{f}$, & multiplicando per f, oritur $pf-ff=q-i-g$.

Ex hac æquatione sumatur valor i, erit $i=ff-pf+q-g$, & ex quarta valor alter ipsius i, nempe $i=\frac{s-fl}{g}$, & in hac substituto valore l, qui ex æquatione quinta desumitur (hoc est $l=\frac{t}{g}$) erit $i=\frac{s}{g}-\frac{ft}{gg}$, proinde oritur $ff-pf+q-g=\frac{s}{g}-\frac{ft}{gg}$, & ordinando æquationem respectu ad incognitam f, habetur æquatio secundi gradus

$$\begin{array}{l} ff-pf+q=0 \\ \quad +\frac{tf}{gg}-g \\ \qquad -\frac{s}{g} \end{array}$$

Ex

Ex qua ut obtineatur valor ipsius f, determinari prius debet quantitas g, quæ habetur ut cognita, cum sit unus ex divisoribus ultimi termini æquationis datæ: nam ex quinta æquatione $gl = t$. Ponatur ergo $g = 1$. Sed claritatis gratia ecce exemplum.

Sit data æquatio $x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x - 1 = 0$, erit $p = -4$, $q = 6$, $r = -8$, $s = 5$, $t = -1$. Positis valoribus p, q, s, t in illa æquatione secundi gradus cum valore g, fiet illa $ff + 3f = 0$, unde $f = -3$. Ponantur hi valores $f = -3$, & $g = 1$ in æquatione $x^2 + fx + g = 0$, oritur $x^2 - 3x + 1 = 0$, per quam dividi debet æquatio superior data $x^5 - 4x^4 + 6x^3$ &c. quæ divisio exacte succedit, & habetur in quoto $x^3 - 1x^2 + 2x - 1 = 0$, quæ quidem amplius divisibilis non est. Habentur ergo duæ æquationes quæsitæ, & æquationem datam esse reducibilem concluditur. Radices æquationis secundi gradus habentur *per Prop.* 1. *&* 3. *Cap.* 8. Cubicæ vero *per Prop.* 8. *vel* 9. *Cap.* 9.

COROLL. I. *Manifestum est, æquationem* $x^3 - 1x^2 + 2x - 1 = 0$, *quæ provenit ex divisione propositæ æquationis, habere pro coefficientibus valores indeterminatarum* h, i, l, *quæ suppositæ fuerunt, nempe* -1, $+2$, -1, *proinde æquationem datam per alterutram potuisse dividi. Quod & pro sequenti Propos. intelligitur.*

COROLL. II. *Substitutis singulis ultimi termini divisoribus* $+1$, -1 *in æquatione* $x^2 + fx + g = 0$, *si per hanc æquatio data exacte dividi minime potuisset, signum erat, illam esse irreducibilem, & solidum quinque dimensionum problema proprie constituere, cujus latera per Curvas inveniri debent.*

PRO-

PROPOSITIO VIII.

An æquatio sexti gradus sit reducibilis, examinare.

Sit æquatio generalis repræsentans omnes alias sexti gradus æquationes $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + v = 0$, quæritur an divisibilis sit in alias duas inferioris gradus, & quænam illæ sint.

I. Supponatur esse altera quarti gradus $x^4 + fx^3 + gx^2 + hx + i = 0$, altera secundi gradus $x^2 + mx + n = 0$. Ex quarum facto oritur æquatio priori æqualis, nempe

$$\begin{array}{l} x^6 + fx^5 + gx^4 + hx^3 + ix^2 + imx + in = 0 \\ \quad + mx^5 + fmx^4 + gmx^3 + hmx^2 + hnx \\ \qquad + nx^4 + fnx^3 + gnx^2 \end{array}$$

Unde facta terminorum utriusque æquationis comparatione, habentur sex æquationes. $1.^a\ f + m = p$, $2.^a\ g + fm + n = q$, $3.^a\ h + gm + fn = r$, $4.^a\ i + hm + gn = s$, $5.^a\ im + hn = t$, $6.^a\ in = v$.

Sumatur ex prima valor f, nempe $f = p - m$, quo in secunda æquatione posito, oritur $g + pm - mm + n = q$, unde eruitur valor $g = q - pm + mm - n$. Cum autem habeatur in sexta $in = v$, erit $i = \frac{v}{n}$, quo valore posito in quinta æquatione, habetur $\frac{mv}{n} + hn = t$, ex qua eruitur valor h, nempe $h = \frac{t}{n} - \frac{mv}{nn}$. Jam valor

lor ipſarum g, h, i ponatur in quarta æquatione, oritur $\frac{v}{n}+\frac{tm}{n}-\frac{m^2v}{nn}+qn-pmn+m^2n-nn=s$. Duæ fractiones $\frac{v}{n}+\frac{tm}{n}$ reducantur ad idem nomen cum alia $\frac{-m^2v}{nn}$, fiet æquatio $\frac{vn+tmn-m^2v}{nn}+qn-pmn+m^2n-nn=s$, & multiplicando omnes terminos per nn, ut fractio evaneſcat, fit $vn+tmn-m^2v+qn^3-pmn^3+m^2n^3-n^4=snn$, hoc eſt

$$m^2n^3-m^2v=pmn^3-tmn-vn-qn^3+n^4+sn^2.$$

Dividendo autem utrunque æquationis membrum per n^3-v, & ordinando æquationem ſecundi gradus in ordine ad incognitam m, habetur

$$\frac{\begin{array}{r} m^2-pn^3m+vn=0 \\ +tmn+qn^3 \\ -n^4 \\ -sn^2 \end{array}}{n^3-v}$$

Eſt autem quantitas n unus ex diviſoribus ultimi termini æquationis, nam ex ſexta æquatione habetur $in=v$. Itaque diviſores ſinguli, quibus æquari poteſt n, cum ſignis $+$ & $-$ ſubſtituendi ſunt ſucceſſive in ſuperiori æquatione una cum valoribus p, q, t, s, v ad obtinendum valorem ipſius m. Sed claritatis gratia,

Sit æquatio data $x^6 - 13x^5 + 45x^4 - 71x^3 + 57x^2 - 16x + 2 = 0$, erit $p = -13$, $q = 45$, $r = -71$, $s = 57$, $t = -16$, $v = 2$. Ponatur $n = 2$. Æquatio superior secundi gradus fit $m^2 + 12m + 20 = 0$, unde *per Prop.* 1. *Cap.* 8. habetur valor ipsius $m = -2$, substituendus in æquatione assumpta $x^2 + mx + n = 0$ una cum valore n, quæ proinde fit $x^2 - 2x + 2 = 0$. Per hanc tentari debet divisio æquationis datæ $x^6 - 13x^5 + 45x^4$ &c. quæ quidem exacte dividitur, & in quoto habetur æquatio altera quarti gradus $x^4 - 11x^3 + 21x^2 - 7x + 1 = 0$, quæ amplius divisibilis non est. Æquatio autem $x^2 - 2x + 2 = 0$ exhibet duas radices $x = 1 \pm \sqrt{-1}$ *per Prop.* 1. *Cap.* 8. reliquæ habentur *per Propos.* 2. *hujus*, aut per Curvas si biquadratica solutionem non admittat.

II. Quod si, his peractis, æquatio data sexti gradus dividi non potuisset per æquationem secundi gradus, ut supra, inventam, tunc videndum an illa ex duabus tertii gradus fuerit composita, ideoque in duas tertii gradus sit divisibilis. Sit igitur una ex his $x^3 + fx^2 + gx + h = 0$, altera $x^3 + mx^2 + nx + l = 0$, ex quarum facto oritur

$$\begin{aligned} x^6 + fx^5 + gx^4 + \ & hx^3 + hmx^2 + hnx + hl = 0 \\ + mx^5 + fmx^4 + \ & gmx^3 + gnx^2 + glx \\ + nx^4 + \ & fnx^3 + flx^2 \\ + \ & lx^3 \end{aligned}$$

Quæ ex hypothesi est æqualis æquationi generali repræsentanti omnes sexti gradus æquationes, scilicet

$$x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + v = 0$$

Facta

Facta igitur terminorum comparatione, habentur sex æquationes, 1.^{a} $f+m=p$, 2.^{a} $g+fm+n=q$, 3.^{a} $h+gm+fn+l=r$, 4.^{a} $hm+gn+fl=s$, 5.^{a} $hn+gl=t$, 6.^{a} $hl=v$.

Cum ex prima deducatur $f=p-m$, multiplicando per m, erit $fm=pm-m^2$. Ponatur in secunda æquatione loco fm ejus valor, fiet $g+pm-m^2+n=q$, hoc est $g=q-pm+m^2-n$, seu $m^2-pm-n+q=g$: quæ quidem æquatio si ducatur in l, erit $m^2l-pml-nl+ql=gl$; sed ex quinta $gl=t-hn$, erit ergo $m^2l-pml-nl+ql=t-hn$. Utraque ducatur in l, oritur $m^2ll-pmll-nll+qll=tl-hnl$. Cum autem ex sexta sit $hl=v$, substituto hoc valore, habetur $m^2ll-pmll-nll+qll=tl-vn$, seu $m^2ll-pmll+qll-tl=nll-vn$, unde eruitur valor $n=\frac{m^2ll-pmll+qll-tl}{ll-v}$.

Inveniri debet jam alter ipsius n valor hac ratione. Ducatur æquatio tertia $h+gm+fn+l=r$ in l, oritur $hl+gml+fnl+ll=rl$; cumque ex sexta habeatur $hl=v$, substituto hoc valore, erit $v+gml+fnl+ll=rl$, seu $gml=rl-v-fnl-ll$. Habetur autem ex secunda æquatione $g=q-fm-n$, quæ si multiplicetur per ml, oritur $gml=qml-fm^2l-mnl$; hinc $rl-v-fnl-ll=qml-fm^2l-mnl$. Ponatur loco f ejus valor ex prima æquatione desumptus, erit $rl-v-pnl+mnl-ll=qml-pm^2l+m^3l-mnl$, seu $2mnl-pnl=m^3l-pm^2l+qml+ll-rl+v$, atque hinc tandem obtinebitur $n=\frac{m^3l-pm^2l+qml+ll-rl+v}{2ml-pl}$.

 Ex

Ex duobus ejuſdem n valoribus inventis deducitur

$$\frac{m^2ll - pmll + qll - tl}{ll - v} = \frac{m^3l - pm^2l + qml + ll - rl + v}{2ml - pl}$$

Factaque invicem multiplicatione, & ordinata æquatione tertii gradus, ad quem aſcendit indeterminata m, erit

$$m^3 \begin{array}{l} -2pl^3m^2 - 2tl^2m - pql^3 \\ - vplm^2 + p^2l^3m + ptl^2 \\ \quad\quad + ql^3m - l^4 \\ \quad\quad + vqlm + rl^3 \\ \quad\quad\quad\quad - vrl \\ \quad\quad\quad\quad + vv \end{array} = 0$$
$$\overline{\quad l^3 + vl \quad}$$

Quæritur modo valor ipſius m; ſed prius determinari debet l, qui eſt unus ex diviſoribus ultimi termini datæ æquationis. Nam $hl = v$ ex ſexta æquatione. Utque id omne clarius intelligatur,

Sit æquatio $x^6 - 8x^5 + 13x^4 - 23x^3 + 10x^2 - 7x - 12 = 0$. Erit $p = -8$, $q = 13$, $r = -23$, $s = 10$, $t = -7$, $v = -12$, cujus diviſores ſunt 1, 2, 3, 4, 6, 12, *per Prop. 9. Cap. 1.* Ponatur igitur $l = 1$, & ſingulis valoribus p, q, r, t, l in ſuperiori æquatione ſubſtitutis, invenitur æquatio ipſa $m^3 + \frac{80m^2 + 65m - 4}{11} = 0$.

Hæc ut a fractione liberetur *per Propoſ. 10. Cap. 6.* fiat $m = \frac{y}{11}$, oritur $y^3 + 80y^2 + 715y - 484 = 0$, quæ quidem

dem si dividatur per binomium $y + 11$, hoc est per unum ex divisoribus ultimi termini inventum *per Prop.* 1. *vel* 2. *Cap.* 7. divisio fit sine residuo, proinde innotescit $y = -11$, *per Schol.* 1. *Prop.* 1. *Cap.* 6. atque hinc $m = \frac{y}{11} = \frac{-11}{11} = -1$. Hoc valore ipsius m una cum valoribus p, q, t, l positis in æquatione $n = \frac{m^2ll - pmll + ql - tl}{ll - v}$, fit $n = \frac{13}{13} = 1$. Determinatis ergo jam valoribus m, n, l, determinata quoque existit æquatio assumpta $x^3 + mx^2 + nx + l = 0$, quæ fit $x^3 - 1x^2 + 1x + 1 = 0$, per quam fieri debet divisio æquationis datæ $x^6 - 8x^5 + 13x^4 - 23x^3 + 10x^2 - 7x - 12 = 0$, quæ quidem exacte succedit, & habetur in quoto $x^3 - 7x^2 + 5x - 12 = 0$, quæ amplius non est divisibilis. Patet ergo æquationem datam reducibilem esse in duas tertii gradus $x^3 - 7x^2 + 5x - 12 = 0$, & $x^3 - 1x^2 + 1x + 1 = 0$. Quarum radices per Cardani regulas *ex Propos.* 8. *Cap.* 9. obtineri facile possunt.

COROLL. *Si æquationis divisio haud successisset, substituendi erant successive loco* l *singuli divisores ipsius* $v = -12$. *At si divisoribus his frustra tentatis, divisio fieri non possit, æquatio erit revera sexti gradus & irreducibilis.*

SCHOL. *Plerique de his reductionibus agunt, cum æquationum compositarum radices rationales inquirunt, ad quas proprie pertinent. At differre huc nobis placuit, quod tyrones sine prævia resolutione æquationum eas haud satis percipere valeant, ut ex reductionibus æquationum quinti & sexti gradus supra allatis evidens est.*

CA-

CAPUT XI.

De limitibus radicum, earumque approximatione.

PROPOSITIO I.

Radicum limites invenire.

Inveniri debent per Analysim duæ quantitates, inter quas radix æquationis continetur, quæ *limites* dicuntur, hoc pacto:

I. Sit æquatio $x^2+px-q=0$, erit $x^2+px=q$, & sublato ex uno membro x^2, remanet $px<q$, atque hinc $x<q:p$. Duo puncta (:) sunt nota divisionis.

Similiter quia $x^2+px=q$, sublato ex una parte px, erit $q>x^2$, & $\sqrt{q}>x$. Multiplicando autem per x, erit $x\sqrt{q}>x^2$, & addendo utrinque px, habetur $x\sqrt{q}+px>x^2+px$; sed $x^2+px=q$, proinde erit quoque $x\sqrt{q}+px>q$; atque hinc habetur $x>\dfrac{q}{p+\sqrt{q}}$. Sunt ergo limites quæsiti $q:p$, & $q:(p+\sqrt{q})$ unde propositæ æquationis radix minor est $q:p$, & major $q:p+\sqrt{q}$.

Sit exemplum $x^2+4x-12=0$, erit $p=4$, $q=12$, unde $q:p=12:4=3$; & $q:(p+\sqrt{q})=12:4+3=12:7=1\frac{5}{7}$. Sunt ergo limites quæsiti 3, & $1\frac{5}{7}$, proinde radix nequit esse major quam 3, nec minor quam $1\frac{5}{7}$. Equidem si tentetur divisio per $x+2$, minime succedit; bene

bene tamen ſuccedit exacte per $x-2$, & habetur in quoto altera æquationis radix $x+6$. Unde vel hoc uno exemplo patet, beneficio limitum nos multo labore liberari, cum ex omnibus ultimi termini diviſoribus duo tantum tentandi fuerint $x+2$, & $x-2$. *Vide Coroll.* 2. *hujus*.

II. Sit $x^2-px+q=0$, erit $x^2+q=px$, proinde $x^2<px$, & dividendo per x, $x<p$. Similiter quia $x^2+q=px$, erit $q<px$, & $q:p<x$. Sunt ergo limites quæſiti p, & $q:p$, ita ut radix minor ſit quantitate cognita p, ſed major quam $q:p$.

Sit exemplum $x^2-3x+3=0$, erit $p=3$, & $q=3$, cujus limites ſunt $p=3$, & $q:p=3:3=1$. Radix ergo non erit major quam 3, nec minor unitate, nempe $x=1\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}$. *Vide Coroll.* 3. *hujus*.

III. Sit $x^2-px-q=0$, erit $x^2=px+q$, proinde $x^2>q$, ideoque $x>\sqrt{q}$, & multiplicando utrinque per $\sqrt{q}$, habetur $x\sqrt{q}>q$. Jam ſi in æquatione $x^2=px+q$ loco ipſius q ponatur $x\sqrt{q}$, erit $x^2<px+x\sqrt{q}$, & dividendo per x, erit $x<p+\sqrt{q}$.

Pariter quia $x^2=px+q$, erit $x^2>px$, & dividendo per x, erit $x>p$, & multiplicando utrinque per p, erit $px>pp$; ſed $x^2=px+q$, ergo $x^2>pp+q$, & extrahendo utrinque radicem ſecundam, habetur $x>\sqrt{pp+q}$. Sunt ergo limites quæſiti $p+\sqrt{q}$, & $\sqrt{p^2+q}$, hoc eſt radix debet eſſe minor quam $p+\sqrt{q}$, ſed major quam $\sqrt{pp+q}$.

IV. Sit æquatio cubica ſecundo termino carens $x^3-qx+r=0$, erit $x^3=qx-r$, unde $x^3<qx$, & dividendo

do per x, $x^2<q$; ideoque $x<\sqrt{q}$. Similiter cum ſit ex hypotheſi $x^3-qx+r=0$, erit $x^3+r=qx$, atque hinc $qx>r$, & $x>r:q$. Sunt ergo limites quæſiti $\sqrt{q}$, & $r:q$, ita ut radix æquationis nequeat eſſe major $\sqrt{q}$, nec minor $r:q$.

Sit exemplum $x^3-19x+30=0$, erit $q=19$, $r=30$, unde $\sqrt{q}=4$, & $r:q=\frac{30}{19}=1\frac{1}{2}$ circiter. Tentanda eſt ergo diviſio per $x+2$, vel $x-2$, vel $x+3$, aut $x-3$, & quidem exacte ſuccedit per $x-2$, & habetur in quoto æquatio ſecundi gradus $x^2+2x-15=0$, cujus una radix eſt $+3$, altera -5 *per Prop.* 1. *vel* 3. *Cap.* 8.

V. Sit æquatio cubica $x^3-px-q=0$, erit $x^3-px=q$, & dividendo per x primam partem, fit $x^2-p<q$, adeoque $x^2<p+q$, & $x<\sqrt{p+q}$. Similiter cum ſit $x^3-px=q$, auferendo ex prima parte px, erit $x^3>q$, adeoque $x>\sqrt[3]{q}$.

Sit exemplum $x^3-12x-12=0$, erit $p=12$, & $q=12$; adeoque $x<\sqrt{24}=4$, item $x>\sqrt[3]{12}=2$. Eſt ergo x minor quam 4, ſed major quam 2, proinde radix inter 4 & 3 latet, ut inferius patebit.

VI. Demum ſit æquatio cubica $x^3+qx-r=0$, erit $x^3+qx=r$; & ſubtrahendo ex una tantum parte x^3, erit $qx<r$; dividendo autem per q, habetur $x<r:q$ pro primo limite.

Similiter quia $x^3+qx=r$, ſublato ex una tantum parte qx, erit $x^3<r$, & $x<\sqrt[3]{r}$, & elevando ad ſecundam poten-

potentiam utrunque membrum, erit $xx < \sqrt[3]{r^2}$, & multiplicando per x, erit $x^3 < x\sqrt[3]{r^2}$. Hoc autem valore in æquatione data ſubſtituto, habetur $qx + x\sqrt[3]{r^2} > r$, proinde $x > \frac{r}{q + \sqrt[3]{r^2}}$ dat alterum limitem quæſitum. Radix igitur minor eſt $r:q$, ſed major $\frac{r}{q + \sqrt[3]{r^2}}$.

VI. Sit æquatio quarti gradus $x^4 - px^2 - qx - r = 0$, erit $x^4 - px^2 = qx + r$, proinde $x^4 > px^2$, alias in hac ipſa æquatione $qx + r$ non eſſet quantitas poſitiva. Eſt ergo $x^2 > p$, & $x > \sqrt{p}$.

Similiter quia $x^4 - px^2 - qx = r$, ſi dividatur primum membrum per x, erit $x^3 - px - q < r$, pariterque $x^3 - px < r + q$. Dividatur primum membrum per x, erit multo magis $x^2 - p < r + q$, item $x^2 < r + q + p$, & extracta radice, habetur $x < \sqrt{r + q + p}$. Sunt ergo limites $\sqrt{p}$, & $\sqrt{r + q + p}$.

Sit exemplum $x^4 - 8x^2 - 4x + 3 = 0$, erit $p = 8$, $q = 4$, $r = 3$; hinc $\sqrt{p} = 2$, & $\sqrt{r + q + p} = 1 + 2 + 2 = 5$. Eſt ergo radix inter limites 2 & 5.

COROLL. I. *Eadem ratione inveniri poſſunt limites pro iiſdem æquationibus etiamſi nullo termino careant; tum etiam pro æquationibus altiorum graduum, quemadmodum egregie fecit* Florimundus de Beaune ([a]), *cui tam præclarum inventum, teſte* Eraſmo Bartolino, *debemus acceptum.*

Pp Co-

(a) Introduct. ad Geometriam Carteſ. Amſtelodami an. 1683. pag. 121.

Coroll. II. *In limitibus dignoſcendis numeri integri ſufficiunt; ideoque fractiones tuto negligi poſſunt, præſertim in extractione radicam. Item ex radicalibus, quæ in formulis limitum apparent, ſatis eſt radicem extrahere, proxime minorem, neglectis fractionibus, ut limes ſit quantitas a fractionibus immunis & rationalis.*

Coroll. III. *Quanquam in æquatione generali quantitates* p, q, r *&c. denotent quantitates negativas, in ſpeciali tamen æquatione quantitates omnes tanquam poſitivæ accipiuntur, ut exempla ſuperiora ſatis docent.*

PROPOSITIO II.

Radicum limites pro quacunque æquatione methodo Newtoniana indagare.

I. Multiplicentur ſinguli datæ æquationis termini per numerum dimenſionum, quas in illis habet incognita, hoc eſt per progreſſionem Arithmeticam naturalem deſcendentem, ita ut ultimus terminus ſit zero, & factum dividatur per radicem æquationis. Deinde æquatio, quæ oritur uno gradu inferior, multiplicetur per aliam ſimilem progreſſionem Arithmeticam, & hoc factum ſimiliter dividatur per radicem æquationis; quod quidem toties fiet, donec occurrat æquatio ſimplex linearis.

Sit æquatio *A* $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

Progr. 3. 2. 1. 0.

Div. per x $3x^3 - 2x^2 - 14x = 0$

B $3x^2$

$$B \quad 3x^2 - 2x - 14 = 0$$

Progr. 2. 1. 0.

Div. per x $6x^2 - 2x = 0$

$$6x - 2 = 0$$

$$C \quad 3x = 1$$

Æquationes *A*, *B*, *C* dicuntur æquationes limitum. Jam vero ad indagandum limitem, intra quem continentur radices positivæ datæ æquationis, hæc est regula: in æquationibus *A*, *B*, & *C* loco incognitæ x ponitur quilibet numerus 1, vel 2, vel 3 &c. incipiendo ab unitate: nam numerus, qui in singulis æquationibus summam positivam efficit, dat limitem quæsitum. Sic in superiori exemplo ponendo 1 loco x in æquatione *C*, $3x - 1 = 2$, prodit summa positiva, sed in æquatione *B*, $3x^2 - 2x - 14 = -13$ prodit negativa. Idem sequitur ponendo 2, & 3 loco x. Quare infertur limitem his numeris fore majorem. Pono igitur 4, & prodeunt numeri omnes positivi scilicet

$$3x - 1 = 11$$

$$3x^2 - 2x - 14 = 26$$

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 16$$

Omnes hi numeri positivi indicant numerum 4 esse limitem, quem nulla potest radicum positivarum transcendere. Et quidem dividendo superiorem æquationem per $x - 3$, divisio exacte & sine residuo succedit, adeoque habetur 3 una ex radicibus positivis ejusdem æquationis.

II. Pro inveniendo limite, quem maxima radicum negativarum non tranſcendit, examinandum eſt ſimili ratione, quinam numerus negativus poſitus loco x in iiſdem tribus æquationibus A, B, & C efficiat ſummam poſitivam in æquationibus illis, quæ habent dimenſiones numero pares, ſummam vero negativam in æquationibus dimenſionum numero imparium. In ſuperiori exemplo fruſtra tentantur -1, -2, -3, -4: ſed poſito -5 loco x, prodit ſumma negativa in æquationibus numero imparium dimenſionum, poſitiva vero in æquationibus dimenſionum numero parium; proinde -5 eſt limes, quem radix negativa non tranſcendit, videlicet

$$3x - 1 = -16$$
$$3x^2 - 2x - 14 = +71$$
$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = -6$$

Itaque ſi ſuperior æquatio data $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ dividatur per $x + 4$, diviſio exacte ſuccedit, unde habetur radix negativa -4.

III. Pro obtinendo radicum negativarum limite adhiberi poſſunt etiam numeri affirmativi, modo mutentur ſigna terminorum parium in æquationibus limitum, quod in ſequenti exemplo factum videbis, tunc enim radices falſæ fiunt veræ *per Prop.* 3. *Cap.* 6. ideoque aſſumi poſſunt numeri affirmativi.

Sit æquatio $x^5 - 1x^4 - 7x^3 + 1x^2 + 4x - 4 = 0$, facta eadem operatione, ut ſupra, habentur æquationes limitum, ſcilicet

5x

$$5x - 1 = 0$$
$$10x^2 - 4x - 7 = 0$$
$$10x^3 - 6x^2 - 21x + 1 = 0$$
$$5x^4 - 4x^3 - 21x^2 + 2x + 4 = 0$$
$$x^5 - 1x^4 - 7x^3 + 1x^2 + 4x - 4 = 0$$

In quibus si loco x substituantur 1, vel 2, vel 3, non ubique prodit summa positiva; substituendo autem 4, summa oritur in singulis positiva, proinde 4 est quantitas, quam radicum positivarum maxima non transgreditur.

Ad inveniendum limitem, quem radicum negativarum maxima non excedit, mutatis terminorum parium signis, adhibentur eodem modo numeri affirmativi. Itaque ponendo in singulis æquationibus loco x numerum 2, prodit ubique summa affirmativa. In æquatione tamen $x^5 + 1x^4 - 7x^3 + 1x^2 + 4x + 4 = 0$, prodit zero, quod indicat numerum 2 non modo esse limitem quæsitum, sed etiam unam ex radicibus ejusdem æquationis, quæ proinde facit, ut omnia producta se mutuo destruant *per num.* 5. *Propos.* 1. *Cap.* 6. En limitum æquationes cum signis mutatis.

$$5x + 1 = 11$$
$$10x^2 + 4x - 7 = 41$$
$$10x^3 + 6x^2 - 21x - 1 = 61$$
$$5x^4 + 4x^3 - 21x^2 - 2x + 4 = 28$$
$$x^5 + 1x^4 - 7x^3 - 1x^2 + 4x + 4 = 0$$

Habentur ergo limites 4, & -2, inter quos radices omnes æquationis datæ continentur.

Ra-

Ratio methodi hujus est, quia in æquatione radicem positivam habente omnis numerus positivus loco incognitæ x substitutus vel est æqualis ipsi radici, & sic æquatio illa tota evanescit *per num.5. Prop.* 1. *Cap.* 6., vel est major, & tunc efficit omnia illa producta positiva esse; vel est ipsa radice minor, & in hoc casu aliquod ex illis productis negativum apparet. Sit brevitatis gratia æquatio secundi gradus $A, x^2 + 3x - 10 = 0$, cujus radices sunt 2 & -5; ex superiori canone limitum æquatio erit B $2x + 3 = 0$. Pono in utraque æquatione A & B loco x numerum positivum 3 radice ipsa positiva 2 majorem; erit $A, 9 + 9 - 10 = 8$, & $B, 6 + 3 = 9$, ideoque 3 est limes æquationis quæsitus. Quod si ponatur 1 eadem radice positiva 2 minor, erit $A, 1 + 3 - 10 = -6$, & $B, 2 + 3 = 5$: quod regulæ repugnat, ut patet, cum productum unum sit negativum. Proinde 1 nequit esse datæ æquationis limes.

Similiter in eadem æquatione radix negativa est -5. Pono in utraque æquatione A & B loco x numerum negativum -6 radice ipsa negativa majorem; quo quidem substituto, erit $A, 36 - 18 - 10 = 8$; at $B, -12 + 3 = -9$, quod cum regula optime convenit. At si ponatur -4, numerus scilicet radice ipsa negativa minor, tunc facta substitutione in iisdem æquationibus A & B, prodit $A, 16 - 12 - 10 = -6$, at $B, -8 + 3 = -5$ quod regulæ adversatur; cum æquatio A, quæ paris dimensionis est, producta positiva debeat efficere. Igitur ex hujusmodi productis affirmativis & negativis limites æquationum recte inferuntur.

Co-

CORQLL. *Inventis limitibus, non solum minimo labore inveniuntur radices rationales, si quæ sunt, quas alioquin per ultimi termini divisores inquirere valde laboriosum est; sed etiam in cognitionem devenimus, an æquatio proposita radices surdas habeat. Nam si illa per nullum numerum intra limites constitutum exacte dividi possit, signum est, ipsam non alias nisi surdas radices habere. Sic æquationis* $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$, *quam Cl. auctor affert in Arithm. Univers. radices consistunt inter limites* 2 *&* −3; *unde tentandi sunt solummodo divisores* 1, −1 *&* −2, *qui inter eos limites continentur, ut dignoscatur an talis æquatio per eos dividi exacte possit, adeoque radices rationales habeat. At quantus labor, si ad hanc rem sub utroque signo* ± *omnes ultimi termini* 120 *divisores tentandi sint?*

PROPOSITIO III.

Æquationum radices prope veras per approximationem extrahere.

I. SIt æquatio data $x^3 - 12x - 12 = 0$. Inveniantur limites *per Prop.* 1. *vel* 2. *hujus*, qui sunt 4 & 3; proinde radix, cum sit media inter 4 & 3, est incommensurabilis, quæ tamen inveniri poterit prope vera hac methodo.

Sumatur semidifferentia inter duos limites 4 & 3, nempe $\frac{1}{2}$, quæ addatur limiti minori, ita ut fiat $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$, & dividatur æquatio data per $x - \frac{7}{2}$, residuum est cum signo

gno —, hoc est $-11\frac{1}{8}$. Proinde sumatur iterum semidifferentia inter limitem majorem 4 & $\frac{7}{2}$, quæ est $\frac{1}{4}$, & addatur ad $\frac{7}{2}$, fiet $= \frac{15}{4}$. Dividatur æquatio data per $x - \frac{15}{4}$, residuum adhuc est negativum, nempe $-\frac{17}{64}$. Itaque rursus sumatur semidifferentia inter limitem majorem 4 & $\frac{15}{4}$, nempe $\frac{1}{8}$, quæ addatur ad $\frac{15}{4}$, fit $= \frac{31}{8}$. Dividatur per $x - \frac{31}{8}$ æquatio data, residuum adhuc est negativum, nempe $-\frac{161}{512}$. Igitur semidifferentia inter majorem limitem 4 & $\frac{31}{8}$, quæ est $\frac{1}{16}$, addenda est ad $\frac{31}{8}$, ut fiat $= \frac{63}{16}$, factaque divisione æquationis datæ per $x - \frac{63}{16}$, habetur residuum positivum $+1\frac{3263}{4046}$; proinde $\frac{63}{16}$ est limes, qui radicem jam transcendit, adeoque propinquiores quæsitæ radicis limites sunt $\frac{63}{16}$ & $\frac{31}{8}$, hoc est $\frac{56}{16}$ & $\frac{62}{16}$; & radix ipsa media est inter $3\frac{15}{16}$ & $3\frac{14}{16}$; ideoque differentia non est nisi $\frac{1}{16}$.

II. Si radix adhuc propinquior desideretur, continuari potest eodem modo approximatio. Nam in superiori exemplo cum ex additione semidifferentiæ $\frac{1}{16}$ facta ad $\frac{31}{8}$ innotescat provenire residuum positivum $+1\frac{3263}{4096}$, addi potest ad $\frac{31}{8}$ dimidium tantum ejusdem semidifferentiæ $\frac{1}{16}$, nempe $\frac{1}{32}$, ut fiat $= \frac{125}{32}$, factaque divisione æquationis datæ per $x - \frac{125}{32}$, provenit residuum pariter positivum $+\frac{23909}{32768}$. Habentur igitur duo limites quæsitæ radicis adhuc propinquiores, nempe $\frac{31}{8}$ & $\frac{125}{32}$, hoc est $\frac{124}{32}$ & $\frac{125}{32}$; proinde radix est inter $3\frac{28}{32}$ & $3\frac{29}{32}$, ita ut differentia tantum sit $\frac{1}{32}$. Hac ratione continuari potest approximatio quantum quis voluerit.

COROLL. *Radix ergo datæ æquationis prope vera in notis decimalibus erit inter* 3.87500 *&* 3.90625, *& differen-*

ferentia $\frac{3125}{100000}$, *quod quidem obtinetur addendo ad numeratores fractionum quinque zeros & dividendo per* 32.

SCHOL. *Pro æquationibus quadraticis radicis approximatio habetur ex communi Arithmetica addendo ad residuum tot cyfrarum paria quot libuerit; hinc* $\sqrt{13} = 3.6055$, *quater additis* 00. Orontius Finæus *id primus docuit.*

PROPOSITIO IV.

Aliæ approximandi rationes expediuntur.

Sit eadem æquatio $x^3 - 12x - 12 = 0$, cujus una radix sit minor 4, sed major 3, ut in præcedenti propositione dictum est. Ponatur esse $x = 3 + y$, & hoc valore in æquatione posito, oritur

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & 27 + 27y + 9y^2 + y^3 \\ -12x & = & -36 - 12y \\ -12 & = & -12 \\ \hline & & -21 + 15y + 9y^2 + y^3 \end{array}$$

Quia vero y hoc loco denotat fractionem, quæ additur ad 3, ut fiat ad veram radicem approximatio, & fractionum potentiæ continuo decrescunt, hinc tuto negliguntur $+ 9y^2 + y^3$, quod etiam in sequentibus observabitur.

Est igitur $15y = 21$, hoc est $y = \frac{21}{15} = \frac{7}{5} = 1.\overset{1}{4}$ (reducendo $\frac{7}{5}$ ad fractiones decimales facilioris calculi gratia) est ergo $y = 1.\overset{1}{4}$. Ponatur jam $x = 3 + 1.\overset{1}{4} + y$, hoc

 est

est $x = 4 \cdot \overset{I}{4} + y$, & hoc valore in æquatione substituto, erit

$$\begin{aligned} x^3 &= 85 \cdot 184 + 58 \cdot 08y \ldots \\ -12x &= -52 \cdot 800 - 12 \cdot 00y \\ -12 &= -12 \cdot \\ \hline & +20 \cdot 384 + 46 \cdot 08y \ldots \end{aligned}$$

Hinc habetur $46 \cdot 0\overset{II}{8}y = -20 \cdot 38\overset{III}{4}$, hoc est $y = -\frac{20 \cdot 38\overset{III}{4}}{46 \cdot 0\overset{II}{8}} = -\overset{I}{4}$. Sed si hujus residuo divisionis addantur duæ, aut tres cyfræ ob majorem approximationem, erit quotus $-442\overset{IV}{3}$, subtrahendus (ob signum $-$) ex $x = 4 \cdot \overset{I}{4}$ hoc est ex $4 \cdot 400\overset{IV}{0}$, eritque residuum $3 \cdot 957\overset{IV}{7}$ radix æquationis magis magisque approximans.

Quod si rursus ponatur $x = 3 \cdot 9577 + y$, & pari ratione operatio eadem continuetur, multo major fiet ad veram radicem approximatio. Sed hoc ad methodi intelligentiam satis.

COROLL. I. *Hinc facile eruuntur approximandi formulæ, quæ ad hanc rem afferri solent. Sit enim, ut supra, æquatio* $-21 + 15y = 0$. *Si fiat* $p = -21$, & $q = 15$, *erit* $qy = -p$, *proinde* $y = -p : q$, *hoc est* $y = \frac{21}{15} = 1 \cdot \overset{I}{4}$, *omnino ut superius.*

COROLL. II. *Vel cum* Hallejo ([a]) *sit eadem æquatio* -21

([a]) In Transact. Anglican. n. 210.

$-21+15y+9y^2=0$, *&* *fiat* $p=-21$, $q=15$, *&* $r=9$, *erit* $ry^2+qy=-p$, *&* *dividendo per* $q+ry$, *habetur* $y=-p:(q+ry)$. *Sed* ex Coroll. 1. *est* $y=-p:q$, *ergo* $y=-p:(q-pr:q)$ *proinde* $y=21:(15+\frac{189}{15})=21:(15+\frac{63}{5})=21:(\frac{138}{5})$, *hoc est* $y=\frac{105}{138}$, *&* *dividendo per* 3, *erit* $y=\frac{35}{46}$: *quæ fractio si ad decimales reducatur* per Prop. 4. Append. *erit* $y=7686\overset{v}{9}$. *Hic valor si addatur ad* 3 *limitem æquationis, ita ut fiat* $x=3+7686\overset{v}{9}$, *&* *continuetur eodem modo operatio, invenitur ex eadem* Halleii *formula radix prope vera, vel quæ a vera minimum differentiet*.

SCHOL. *Approximandi regulæ hactenus explicatæ sunt tantum pro æquationibus numericis*.

PROPOSITIO V.

Radices prope veras in æquationibus literalibus indagare.

SIt data æquatio secundi gradus $x^2-2nx-r^2=0$, cujus radix *per Prop.* 1. *vel* 3. *Cap.* 8. erit $x=n+\sqrt{r^2+n^2}$, seu $x=n+\overline{r^2+n^2}^{\frac{1}{2}}$ *per Defin.* 5. *Cap.* 3. Quæritur valor approximatus potentiæ imperfectæ $\overline{r^2+n^2}^{\frac{1}{2}}$, quod quidem duplici methodo obtineri potest.

I. Ex r^2+n^2 extrahatur radix secunda, habebitur *per Prop.* 11. *Cap.* 3. valor quæsitus per seriem infinitam ter-

minorum, nempe $r + \frac{n^2}{2r} - \frac{n^4}{8r^3} + \frac{n^6}{16r^5}$ &c. $= \overline{r^2+n^2}^{\frac{1}{2}}$ $= \sqrt{r^2+n^2}$, & si fiat $n = 1$, erit $r + \frac{1}{2r} - \frac{1}{8r^3} + \frac{1}{16r^5}$ &c.

II. Supponatur $z = \overline{r^2+n^2}^{\frac{1}{2}}$, erit $zz = r^2 + n^2$, & $zz - r^2 - n^2 = 0$.

Ponatur deinde z æqualis seriei infinitæ terminorum, quorum exponentes progressionem Arithmeticam, ipsi vero Geometricam servent, & multiplicati existant per literas a, b, c, d &c. quæ hoc loco tanquam indeterminatæ considerantur. Hi autem termini proportionales constantur ex quantitate aliqua cognita datæ æquationis, ut n in hoc exemplo, nempe

Sit $z = an^0 + bn^2 + cn^4 + dn^6 +$ &c. (primus terminus $an^0 = a$, nam $n^0 = 1$, quod semper advertatur) elevetur ad secundam potentiam utrunque hujus æquationis membrum, & ponatur in superiori æquatione $zz - r^2 - n^2 = 0$ loco zz ejus valor, erit

$zz =$	$a^2 + 2abn^2 + bbn^4 + 2adn^6$ &c.
	$+ 2acn^4 + 2bcn^6$ &c.
$-n^2$	$-n^2$
$-r^2$	$-r^2$

Jam singuli termini æquentur zero, ut habeantur totidem æquationes particulares ad determinandum valorem ipsarum a, b, c, d &c.

Erit

Erit 1.^{a} $a^2 = r^2$, atque hinc $a = r$.

2.^{a} $2ab = 1$, & posito r loco a, erit $2rb = 1$, seu $b = \frac{1}{2r}$.

3.^{a} $2ac = -bb$, & substitutis valoribus b & a, erit $2rc = -\frac{1}{4rr} = c = -\frac{1}{8r^3}$.

4.^{a} $2ad = -2bc$, hoc est $ad = -bc$, & positis valoribus a, b, c, habetur $d = \frac{1}{16r^5}$ &c.

Surrogentur hi valores in serie assumpta $an^0 + bn^2 + cn^4 + dn^6$ &c. erit $r + \frac{1}{2r}n^2 - \frac{1}{8r^3}n^4 + \frac{1}{16r^5}n^6$ &c. Quod si ponatur $n = 1$, erit valor quæsitus ipsius $\overline{r^2 + n^2}^{\frac{1}{2}} = r + \frac{1}{2r} - \frac{1}{8r^3} + \frac{1}{16r^5}$ &c. ut supra.

Est ergo radix propositæ æquationis $x = 1 + r + \frac{1}{2r} - \frac{1}{8r^3} + \frac{1}{16r^5}$ &c.

SCHOL. *Poterat series efformari ex altera quantitate cognita* r, *ita ut fieret* $z = ar^0 + br^2 + cr^4$ &c. *si* r *minor fuisset quam* n. *Nam series, ut ad verum valorem magis accedat, debet esse* convergens. *Quod ut fiat, necesse est numerator fractionis denominatore sit minor* per Coroll. 2. Prop. 8. Cap. 2. *unde in hoc casu quantitas* n *fieret in seriei terminis denominator. Hoc semper erit in ejusmodi seriebus efformandis observandum.*

PRO-

PROPOSITIO VI.

Idem problema alio modo resolvitur.

I. Sit eadem $x^2 - 2nx - r^2 = 0$, cujus radix per approximationem quæritur. Supponatur ſtatim valor incognitæ x æqualis ſeriei indeterminatæ quoruncunque terminorum, nempe

Sit $x = an^0 + bn^1 + cn^2 + dn^3 + en^4$ &c. Quantitates a, b, c &c. ſunt indeterminatæ, & $n^0 = 1$, unde $an^0 = a$. Elevetur ſeries ad ſingulos gradus, quos habet x in data æquatione, ita ut æquatio transformetur in aliam indeterminatam, ſcilicet

$$\left.\begin{array}{r} x^2 \\ \\ -2nx \\ -r^2 \end{array}\right| \begin{array}{l} = a^2 + 2abn + 2acn^2 + 2adn^3 + 2aen^4 \text{ \&c.} \\ \qquad\qquad\qquad + bbn^2 + 2bcn^3 + 2bdn^4 \text{ \&c.} \\ \qquad\quad - 2an - 2bn^2 - 2cn^3 + ccn^4 \text{ \&c.} \\ - r^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 2dn^4 \text{ \&c.} \end{array}$$

Jam ſinguli termini æquentur zero, ut determinetur valor ipſarum a, b, c, d &c. ex æquationibus particularibus, quæ ſequuntur.

1.ª $a^2 - r^2 = 0$, atque hinc $a^2 = r^2$, & $a = r$.

2.ª $2ab - 2a = 0$, & poſito r loco a, erit $rb = r$, hoc eſt $b = 1$.

3.ª $2ac + bb - 2b = 0$, & $2ac + bb = 2b$, in qua poſitis valoribus a & b, habetur $2rc + 1 = 2$, atque hinc $c = \frac{1}{2r}$.

4.ª $2ad$

4.ª $2ad + 2bc - 2c = 0$, & $ad + bc = c$, in eaque substitutis valoribus ipsarum a, b, c, erit $d = 0$.
5.ª $2ae + 2bd + cc - 2d = 0$, & abjectis (ob $d = 0$) terminis $2bd - 2d$, remanet $2ae = -cc$, unde eruitur

$$e = -\frac{1}{8r^3}.$$

His valoribus surrogatis in serie $a + bn^1 + cn^2 + dn^3$ &c. oritur series determinata $r + n^1 + \frac{1}{2r}n^2 - \frac{1}{8r^3}n^4 - \frac{1}{32r^5}n^6$ &c. ac posito $n = 1$, erit $x = r + 1 + \frac{1}{2r} - \frac{1}{8r^3} - \frac{1}{32r^5}$ &c. Ex his paucissimis terminis patet, hanc seriem magis, quam duas superiores, esse convergentem.

II. Sit æquatio cubica
$$\begin{array}{l} x^3 + bbx - 2b^3 = 0 \\ + abx - a^3 \end{array}$$

Fiat series ex quantitate cognita omnium minima, quæ sit a, multiplicata per indeterminatas f, g, h, i &c. & eidem æqualis ponatur incognita x, erit $x = fa^0 + ga^1 + ha^2 + ia^3 + la^4$ &c. quæ series elevetur ad omnes gradus, quos habet x in æquatione data, erit

$$\begin{array}{r|lllll}
x^3 = & f^3 & + 3ffga & + 3fgga^2 & + g^3a^3 & + 3fhha^4 \text{ \&c.} \\
 & & & + 3ffha^2 & + 3ffia^3 & + 3ggha^4 \text{ \&c.} \\
 & & & & + 6fgha^3 & + 3ffla^4 \text{ \&c.} \\
 & & & & & + 6fgia^4 \text{ \&c.} \\
+ bbx & + bbf & + bbga & + bbha^2 & + bbia^3 & + bbla^4 \text{ \&c.} \\
+ abx & & + bfa & + bga^2 & + bha^3 & + bia^4 \text{ \&c.} \\
- 2b^3 & - 2b^3 & & & & \\
- a^3 & & & & - a^3 &
\end{array}$$

Fiant

Fiant singuli termini zero æquales, ut habeantur totidem æquationes particulares ad determinandum valorem ipsarum f, g, h, i &c.

1.ª $f^3 + fbb - 2b^3 = 0$, quæ si dividatur per $f - b$, divisio exacte succedit, proinde b est radix vera ejusdem æquationis, *per num.* 5. *Propos.* 1. *Cap.* 6. eritque $f = b$.

2.ª $3ffg + bbg + bf = 0$, & $3ffg + bbg = -bf$, & posito b loco f, habetur $g = -\frac{1}{4}$. Nam $g = -\frac{bb}{4bb} = -\frac{1}{4}$.

3.ª $3ffh + bbh = -bg - 3fgg$, in qua posito valore ipsarum f & g, invenitur $h = \frac{1}{64b}$.

4.ª $3ffi + bbi = -bh - g^3 - 6fgh + 1$, & substitutis valoribus jam inventis loco f, g, h, habetur $i = \frac{131}{512b^2}$.

5.ª $3ffl + bbl = -bi - 6fgi - 3ggh - 3fhh$, ex qua eodem modo eruitur valor $l = \frac{509}{16384b^3}$.

Porro his valoribus substitutis in serie $fa^0 + ga^1 + ha^2 + ia^3$ &c. habetur $x = b - \frac{1}{4}a + \frac{1}{64b}a^2 + \frac{131}{512b^2}a^3 + \frac{509}{16384b^3}a^4$ &c. Et posito $a = 1$, erit $x = b - \frac{1}{4} + \frac{1}{64b} + \frac{131}{512b^2} + \frac{509}{16384b^3}$.

SCHOL. I. *Si æquatio data duas incognitas* x *&* y *contineat, ut sæpe in Geometria composita contingit, tunc termi-*

termini seriem componentes desumuntur ex incognita, quæ minor est, ut series convergens fiat, quemadmodum in Sch. Prop. præc. *dictum est. Ut si* x *major quam* y, *fiat series* $x = ay^0 + by^1 + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5$ *&c. Cetera peraguntur, ut supra. At plura his addere non est hujus loci.*

SCHOL. II. *Cum series infinitæ primo a* Mercatore Holsato per divisiones, *secundo* a Cl. Newtono per radicum extractiones *quæsitæ fuerint*, *ut in* Schol. 2. Propos. 11. Cap. 3. *innuimus*; *demum celeberrimus* Leibnitius ([a]) *ad eas pervenit* per suppositionem ipsius seriei quæsitæ tanquam inventæ; *ita ut coefficientes terminorum ejusdem seriei postea determinentur, ut series ipsa determinata fiat: quæ sane methodus commodior est longeque ceteris universalior, cum hæc non modo in calculo communi, sed etiam in Differentiali & Integrali usum habere possit plurimum. Nos facile & ad discentium intelligentiam aptum specimen in hac Propositione duntaxat exhibuimus.*

CAPUT XII.

De Geometrica Constructione Æquationum.

GEometricam æquationum constructionem aggredimur. Intelligent hinc tyrones ingentem Analyseos in Geometria usum. Intelligent qua ratione Euclides, Apollonius, magnus Archimedes aliique veteres

([a]) Acta Erudit. Lipsiæ an. 1693.

Geometræ, quæ per Analysin problemata subtiliter invenerant, ea deinde, suppresso calculo, composuerint ac synthetice demonstraverint. Horum vestigiis insistentes *Simplices* tantum & *Quadraticas Æquationes* in hoc capite construimus. Nam quæ altioris sunt gradus, Curvarum doctrinam ad constructionem requirunt. Præmittimus autem his quantitates Analyticas Geometrice exprimendi rationem, cum id tyronibus soleat negotium facessere.

PORISMA I.

Fractiones in terminos proportionales resolvere.

Fractiones Analyticæ, quibus incognita æqualis existit, in terminos proportionales resolvuntur variis quidem modis.

I. Sit $x = \frac{ab}{c}$, erit $c . a :: b . x$, nimirum est x quarta proportionalis *per Prop.* 12. *l.* 6. *Eucl.*

II. Sit $x = \frac{aa - bb}{c - d}$, quia $a + b \times a - b = aa - bb$, erit $c - d . a + b :: a - b . x$ *per Propos. cit.*

III. Sit $x = \frac{ab}{c} + \frac{adc}{n}$. Inveniatur $\frac{ab}{c} = n$, & $\frac{adc}{n} = m$, *per Propos. cit.*; erit $x = n + m$.

IV. Sit $x = \frac{ab + cd}{m + n}$, quia nulla litera in numeratore bis habetur, fiat $a . d :: c .$ ad quartam proportionalem

$= r$,

$= r$, erit $ar = cd$ *per Prop.* 16. *l.* 6. *Eucl.* proinde æquatio mutatur in hanc $\frac{ab + ar}{m + n}$, in qua reperitur bis a, adeoque sic resolvitur $m + n . b + r :: a . x$.

V. Sit $x = \frac{aabc}{ddf}$, fiat primo $d . a :: a$. ad quartam proportionalem $= m$, erit $aa = dm$, proinde ponendo dm loco aa, erit $x = \frac{dmbc}{ddf}$, seu $x = \frac{mbc}{df}$. Secundo fiat $d . m :: b$ ad quartam proportionalem $= n$, erit $dn = mb$; unde surrogando dn loco ipsius mb, erit $x = \frac{dnc}{df}$, seu $x = \frac{nc}{f}$, itaque habetur $f . n :: c . x$, ut supra *num.* 1. aut si fiat $f . n :: c . l$, erit $x = l$, cum sit $\frac{nc}{f} = l$, ut patet.

COROLL. *Hinc facile invenitur recta æqualis pluribus fractionibus datis. Nam sit* $x = \frac{ab}{c} + \frac{adc}{n} + \frac{cn}{f}$ *&c. si reperiatur, ut superius factum est*, per Prop. 12. l. 6. $\frac{ab}{c} = n$, $\frac{adc}{n} = m$, *&* $\frac{cn}{f} = l$, *erit* $x = n + m + l$, *nempe* $x =$ *rectæ lineæ compositæ ex rectis* n, m, l *&c.*

PORISMA II.

Summam, differentiam quadratorum, & radicum extractiones Geometrice exprimere. Fig. 10.

I. Sit triangulum ABC rectangulum in B, cujus hypothenusa sit $AC = a$, unum latus $AB = b$, & alterum $BC = c$, quia $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ *per* 47. *l.* 1. *Eucl.* erit $aa = bb + cc$, & $AC\ (a) = \sqrt{bb + cc}$. Similiter quia $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$, erit $bb = aa - cc$, & $AB\ (b) = \sqrt{aa - cc}$. Item $cc = aa - bb$, & $BC\ (c) = \sqrt{aa - bb}$.

II. Quod si demittatur perpendiculum BD, ita ut basis segmentum sit $DC = x$, erit $AD = a - x$, & ob angulum rectum in D, erit $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{DC}^2 = cc - xx$, unde $BD = \sqrt{cc - xx}$. Similiter quia $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 = bb - aa + 2ax - xx$, erit $BD = \sqrt{bb - aa + 2ax - xx}$.

III. Similiter (*Fig.* 11.) si in semicirculo ABC ducantur duæ quælibet chordæ AB & BC, erit angulus ABC rectus *per* 20. *l.* 3. *Eucl.* Hinc posita diametro $AC = a$, $AB = b$, & $BC = c$, habentur eædem omnino quantitates, quæ supra. Erit enim $AC\ (a) = \sqrt{bb + cc}$. Item $AB\ (b) = \sqrt{aa - cc}$, & $BC\ (c) = \sqrt{aa - bb}$.

IV

IV. Demisso autem ex quovis circuli puncto perpendiculo $BD = y$, sit $DC = x$, erit $AD = a - x$, & *per Coroll. Propos.* 17. *l.* 6. *Eucl. ex Tacquet* $\overline{BD}^2 = AD \times DC$, hoc est $yy = ax - xx$, unde $BD\ (y) = \sqrt{ax - xx}$. Vel sit $ED = x$, $DB = y$, & CE, vel $BE = a$, erit $\overline{BD}^2 = \overline{EB}^2 - \overline{ED}^2$, hoc est $yy = aa - xx$, & $BD\ (y) = \sqrt{aa - xx}$.

COROL. I. *Ex his patet quomodo exprimi possit Geometrice hæc, aut alia similis quantitas Analytica* $\frac{r}{n}\sqrt{bb + cc}$. *Nam inveniatur ut supra*, $a = \sqrt{bb + cc}$, *fiet* $\frac{r}{n}\sqrt{bb + cc} = \frac{ar}{n}$, *quæ quantitas si* per Porif. 1. *in analogiam resolvatur, haberi potest* $\frac{ar}{n} = 1$, *unde* $\frac{r}{n}\sqrt{bb + cc} = 1$.

COROLL. II. *Patet quo pacto media proportionalis per quantitatem radicalem designata, Geometrice sit exprimenda. Nam* (Fig. 11.) *si fiat* $AD = a$ *&* $DC = b$, *&* *ducatur* BD *perpendicularis ad diametrum* AC, *erit* $BD = \sqrt{ab}$ per Cor. Prop. 17. l. 6. Eucl. ex Tacquet.

COROLL. III. *Patet demum qua ratione dato plano* $=$ ab *reperiatur quadratum illi æquale* cc. *Nam sit, ut prius*, $AD = a$, $DC = b$, *& ducatur in circulo ad diametrum* AC *perpendicularis* $DB = c$, *erit* $\overline{DB}^2 = AD \times DC$ per Cor. cit. *hoc est* $cc = ab$. *Contra vero dato quadrato* cc,

& al-

& alterutro plani bd *latere*, *facile est invenire ipsum planum*.

PORISMA III.

Æquationes secundi gradus Geometrice construere.

Quatuor formulis comprehendi solent omnes secundi gradus æquationes, earumque radices ob duplicem valorem affirmativum, & negativum duplici signo afficiuntur $\pm$ ut sæpe diximus, scilicet

	Formulæ.	*Radices.*
1.	$x^2 = ax + bb$	$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$
2.	$x^2 = -ax + bb$	$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$
3.	$x^2 = ax - bb$	$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$
4.	$x^2 = -ax - bb$	$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$

I. Pro prima formula construenda (*Fig.* 12.) fiat triangulum ABC rectangulum in B, cujus latus $BC = b$, & $AB = \frac{1}{2}a$, erit *per Poris.* 2. basis $AC = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Centro igitur A & intervallo AB fiat circulus ABE, & producatur AC in D, erit recta $CD = x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, ut patet.

Vel sic (*Fig.* 13.) fiat $AB = \frac{1}{2}a$, & perpendicularis $BC = b$; tum centro A cum intervallo basis AC fiat semicirculus DCE, in quo producatur AB hinc inde ad peripheriam, erit $DB = x$.

Nam

Nam $DB = AB + AD$ vel AC, ſed $AB = \frac{1}{2}a$, & $AC = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; ergo $DB = x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

II. Pro ſecunda formula conſtructio eſt eadem: nam in *Fig.* 12. (non producta AC in D) erit $CE = x$. Nam $CE = CA - AE$, ſeu AB: ſed $AB = \frac{1}{2}a$, & $CA = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, ergo $CE = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} - \frac{1}{2}a = x$.

Vel in *Fig.* 13. $EB = AE$, (vel AC) $- AB$, proinde $EB = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} - \frac{1}{2}a = x$.

III. Pro tertia formula conſtruenda (*Fig.* 14.), quæ quidem duas habet radices poſitivas, ut ſignorum diſpoſitio docet *per num.* 3. *Prop.* 1. *Cap.* 6. ſit in ſemicirculo AEB diameter $AB = a$, erit ſemidiameter AC, vel CB, vel $CE = \frac{1}{2}a$. Elevetur ex puncto B perpendicularis $BF = b$, & ducatur diametro AB parallela EF, quæ ſecabit circulum in E. Tum ex puncto E ducta ED ad diametrum perpendiculari, erit $AD = x$.

Nam $AD = AC + CD$; ſed $AC = \frac{1}{2}a$, & $CD = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, ergo $AD = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = x$.

Erit autem DB altera radix poſitiva. Nam $DB = BC - CD$, proinde $DB = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = x$.

IV. Formula autem quarta, cujus conſtructio eſt omnino eadem, ambas radices habet negativas, ut ex ſignorum diſpoſitione dignoſcitur *per num.* 3. *Prop.* 1. *Cap.* 6. quarum prima erit $-AD = -AC - CD$, hoc eſt $-\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = x$. Altera vero $-DB = -CB + CD$, hoc eſt $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = x$.

SCHOL..

SCHOL. I. *Ceterum ad absolutam problematis resolutionem una radix & quidem positiva sufficit. Proinde Cartesius de radicibus negativis construendis solicitus nunquam fuit. Recentiores tamen singulas construunt, ut & nos in tertia & quarta formula. Pro prima autem formula radix negativa* (Fig. 13.) *erit* EB. *Nam* $EB = -AE$ (*seu* $-AC) + AB$; *proinde* $EB = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} = x$. *Pro secunda formula radix negativa erit* $-DB$. *Nam* $-DB = -BA - AD$ (*seu* $-AC$), *hoc est* $= -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} = x$. *Hinc apparet constructionem esse eandem, sed radices negativas ad partem oppositam esse desumendas; hoc est si radix positiva* DB *desumpta fuit ex* B *versus* D, *e contrario radix negativa* BE *desumi debet ex* B *versus* E: *quae regula in Geometricis constructionibus semper observatur.*

SCHOL. II. *Si in tertia vel quarta formula* BF ($= b$) *major sit, quam* CB ($= \frac{1}{2}a$) *fieri non poterit, ut parallela* EF *circulum secet, & in hoc casu problema erit impossibile. Ratio est, quia ubi* $b > \frac{1}{2}a$, *erit quoque* $bb > \frac{1}{4}aa$, *ideoque* $\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ *fit quantitas imaginaria, & problema contradictionem involvere signum est. Quod si* $BF = CB$, *hoc est* $b = \frac{1}{2}a$, *tunc parallela* EF *non secat circulum, sed illum tangit in puncto, ex quo si ducatur perpendicularis* ED, *haec in centro consistit, & recta* CD *evanescit, proinde* $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bb} = 0$. *Haec ex ipsa constructione patent.*

SCHOL. III. *Ut obtineantur aequationes supra allatae, vel aliae similes, proposito problemate, delineatur figura, in qua*

in qua problema ipsum quasi solutum ponitur, ducendo in ea lineas perpendiculares, parallelas, angulos æquales, circulos, triangula similia, vel rectangula, aliasque figuras, quarum notæ relationes & proprietates Algebraicas æquationes nobis exhibent. Quæ quidem plenius docent problemata, quæ sequuntur, fere omnia ab Euclide, Archimede, aliisque summis Geometris de industria accepta: cum in his primo versari ex usu discentium esse putaverim.

PROBL. I.

Datam rectam AB *sectam utcunque in* C *ita producere in* E, *ut rectangulum* AEB *sit æquale quadrato* CE.

FActum jam sit, (*Fig.* 15.) & esto data $AB = a$, $CB = b$, quæsita $BE = x$, erit tota $AE = a + x$, & ex conditione problematis $AE \times EB = \overline{CE}^2$, hoc est

$$ax + xx = b^2 + 2bx + xx$$
$$ax = b^2 + 2bx$$
$$ax - 2bx = b^2$$

Div. per $a - 2b$ $\qquad x = \dfrac{b^2}{a - 2b}$

Qua æquatione in terminos proportionales resoluta *per Porism.* 1. habetur $a - 2b . b :: b . x$. Est ergo $BE = x$ tertia proportionalis, unde oritur constructio, quæ sequitur.

Constructio (*Fig.* 16.) Sumatur in AB pars $CD = CB$, erit $DB = 2b$, & $AD = a - 2b$. Fiat AD $(a - 2b)$.

$DC(b)::DC$, vel $CB(b).BE(x)$ tertiam proportionalem quæſitam.

Demonſtr. Cum ex conſtruct. ſit $AD.DC$, vel $CB::CB.BE$, erit componendo *per Propoſ.* 18. *l.* 5. $AC.DC$, vel $CB::CE.BE$. Eſt autem ut AC antecedens ad CB conſequentem, ita CE antecedens ad BE conſequentem, ergo AE ſumma antecedentium erit ad CE ſummam conſequentium, ut CE una antecedentium ad BE unam conſequentium *per Prop.* 12. *l.* 5. ergo rectangulum ſub extremis $AE \times BE$, nempe AF, erit æquale quadrato ſub mediis $CE \times CE$, ideſt CH *per Prop.* 17. *l.* 6. Quod erat &c.

Schol. *Hinc apparet methodus, aut alia huic affinis, quam* Euclides, Archimedes, Apollonius *aliique veteres in ſuis problematibus inveſtigandis, conſtruendis, ac demonſtrandis tenuerunt.*

PROBL. II.

In dato triangulo ABC *quadratum inſcribere.* Fig. 17.

Esto factum, & quadratum inſcriptum ſit $EDFG$. Ducatur perpendicularis AH, quæ ob triangulum datum erit pariter data. Sit $BC = a$, $AH = b$, & HL ſeu $FG = x$, erit $AL = b - x$. Jam ob triangula ſimilia BAC & FAG erit $AH(b).BC(a)::AL(b-x).FG(x)$, proinde

$$bx = ab - ax$$

$$bx + ax = ab$$

Divid. per $a + b$ $\qquad x = \frac{ab}{a+b}$

Reſo-

Resoluta æquatione in terminos proportionales, habetur $a+b.a::b.x$ *per Porif.* 1. unde patet quæsitam $LH=x$ esse quartam proportionalem. Hinc oritur constructio, quæ sequitur.

Constructio. Producta BC indefinite, fiat $HM=BC$, & $MN=AH$, erit $HM+MN=a+b$. Jungatur AN, cui ex puncto M parallela ducatur LM, quæ secabit AH in puncto quæsito L.

Demonstr. Ob parallelas AN & LM triangula AHN, & LHM sunt similia, proinde MN, seu $AH.AL::HM$, seu $BC.LH$. Item ob triangula similia BAC & FAG est $AH.AL::BC.FG$; ergo $AH.AL::BC.LH$, ideoque BC ad duas FG & LH eandem rationem habet, quæ idcirco sunt æquales *per Propos.* 9. *lib.* 5. Est ergo $EDFG$ quadratum. Quod &c.

COROLL. *Tam ex hoc, quam ex præc. problemate apparet, fractiones, quibus quantitas incognita in æquatione finali æquatur, in terminos proportionales esse resolvendas, ut in* Porif. 1. *docuimus*.

PROBL. III.

In quadrilatero ABDE *circulo inscripto rectanguli, quod fit ex diagonalibus* AD × EB *ad rectangula, quæ fiunt ex lateribus oppositis* AE × BD, *&* AB × DE, *rationem invenire*. Fig. 18.

DUcatur DF faciens angulum EDF æqualem angulo ADB, erunt triangula ADB & EDF similia, cum etiam anguli DAB & BED sint æquales, utpote eidem

arcui BD insistentes, proinde $AD.DE :: AB.EF$; & si ponatur $AD = a$, $DE = b$, $AB = c$, & $EF = x$, erit $a.b :: c.x$, ideoque $ax = bc$.

Similiter triangula ADE & BDF sunt æquiangula & similia. Nam si æqualibus ex constructione angulis EDF, & ADB addatur communis ADF, erit $ADE = BDF$. Item $DAE = DBF$, cum eidem arcui DE insistant, & hinc $BF.AE :: BD.AD$. Jam si ponatur tota $BE = f$, erit $BF = f - x$. Sit $AE = d$, & $BD = e$, erit $f - x.d :: e.a$; ideoque $af - ax = ed$. Addatur huic æquationi altera $ax = bc$, erit $af = cd + bc$; unde patet rectangulum, quod fit ex diagonalibus $AD \times BE = af$, æquari duobus rectangulis, quæ fiunt ex lateribus oppositis $AE \times BD = ed$, & $AB \times DE = bc$ simul sumptis.

Demonstr. Ob triangula similia ADB & EDF est $AD.DE :: AB.EF$: ergo *per* 16. *l.* 6. $AD \times EF = DE \times AB$. Item ob triangula similia ADE & BDF est $BF.AE :: BD.AD$; ergo *per Prop. cit.* $AD \times BF = AE \times BD$. Sed $AD \times BF$ & $AD \times EF = AD \times EB$ totam *per* 1. *l.* 2.; ergo $AD \times EB = DE \times AB + AE \times BD$. Quod erat &c.

SCHOL. *Præclarum hinc oritur* Ptolomæi [a] *theorema*: In quadrilatero inscripto in circulo rectangulum sub diagonalibus æquale est rectangulis, quæ a lateribus oppositis fiunt. *Quod quidem magnum habet in Trigonometria usum.*

PROBL.

(a) Almagesti lib. 1. Cap. 9.

PROBL. IV.

Datam rectam AB *media & extrema ratione secare*. Fig. 19.

Secta sit AB in puncto C, ut imperatur; & sit ipsa $AB = a$, $AC = x$, erit $CB = a - x$, & per conditionem problematis cum tota AB debeat esse ad majus segmentum AC, ut AC ad segmentum minus CB, erit $a . x :: x . a - x$. hinc

$$xx = aa - ax$$
$$xx + ax = aa$$

Prop. 1. *Cap.* 8. $\frac{1}{4}a^2 \quad \frac{1}{4}a^2$

$$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2$$

Extra rad. $x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$

$$x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

Construct. A rectæ AB puncto B elevetur perpendicularis $BD = \frac{1}{2}a$; ductaque AD, secetur $ED = DB$ ($= \frac{1}{2}a$). Facto deinde centro in A cum intervallo AE, secetur $AC = AE$, erit C punctum quæsitum.

Demonstr. Triangulum ABD est rectangulum in B, ergo $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = aa + \frac{1}{4}aa = \frac{5}{4}a^2$; unde $AD = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. Est autem $DE = DB = \frac{1}{2}a$; ergo $AE = AD - DE = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a = AC$.

Insuper $CB = a - x$, erit $= \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{2}a^2}$. Sunt autem $AB = a$, $AC = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$, & $CB = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$

tales

tales inter se, ut rectangulum sub extremis $AB \times CB$ sit æquale quadrato mediæ AC, hoc est $\frac{3}{2}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{3}{2}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$, hinc AB, AC & CB sunt continue proportionales *per* 17. *l.* 6. proinde AB secta est in C media & extrema ratione.

CoROLL. I. *Hinc facile eruitur synthetica demonstratio. Nam si data* AB *secetur in* C, *ita ut rectangulum* $AB \times CB$ *sit æquale quadrato* AC, *ut docet* Prop. 11. l. 2. *erit* AB . AC :: AC . CB per 17. lib. 6. *ergo* AB *secta est in* C *secundum medium & extremam rationem* per Defin. 3. lib. 6.

SCHOL. *Certum est quadratum* $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2$ *posse oriri tam ex radice positiva* $x + \frac{1}{2}a$, *quam ex negativa* $-x - \frac{1}{2}a$. *In primo casu habetur radix positiva, quam supra construximus* $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$; *in secundo radix negativa & æqualis nihilo* $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$, *quæ tamen construi potest hac ratione:*

Supposita superiori constructione, producatur BA *versus* F, *& fiat* $AF = DB = \frac{1}{2}a$, *&* $FG = AD = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$, *erit tota* $AG = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = -x$, *&* GB $(= a - x) = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. *Sunt porro tres continue proportionales* $BA = a$, $AG = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$, *&* $GB = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. *Nam* $BA \times GB = \overline{AG}^2$, *cum utrinque oriatur* $\frac{3}{2}a^2 + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$.

CoROLL. II. *In constructione radicum negativarum quantitates cognitæ signo — affectæ desumi debent ad partem oppositam radicum positivarum; quod* in Schol. 1. Poris. 3. *fuit prænotatum, & ex hac constructione apparet.*

PROBL.

PROBL. V.

Datam rectam AB *inæqualiter ita secare in* C, *ut quadrata totius* AB, *& minoris segmenti* BC *sint tripla quadrati, quod fit a segmento majori* AC. Fig. eadem.

Sit $AB = a$, $AC = x$, erit $CB = a - x$, & per conditionem problematis

$$a^2 + a^2 - 2ax + x^2 = 3x^2$$
$$2a^2 - 2ax = 2x^2$$
$$x^2 + ax = a^2$$

Prop. 1. *Cap.* 8. $\qquad \frac{1}{4}a^2 \quad \frac{1}{4}a^2$

$$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2$$

Extr. rad. $\qquad x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$

$$x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

Quæ quidem æquatio cum sit eadem ac superioris problematis, indicio est rectam AB secandam esse media & extrema ratione, ut duo quadrata $\overline{AB}^2$ & $\overline{BC}^2$ sint tripla quadrati $\overline{AC}^2$. Facta igitur eadem constructione, sectaque AB in C media & extrema ratione, erunt tres continue proportionales $AB = a$, $AC = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$, & $BC = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$; atque hinc quadrata $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 3\overline{AC}^2$, hoc est $\frac{9}{2}a^2 - 3a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. Co-

Coroll. *Hinc oritur Theorema* 4. *l.* 13. *Euclidis*: Si recta linea media & extrema ratione secta fuerit, totius & minoris portionis utraque simul quadrata tripla sunt quadrati ejus, quod a majori fit portione. *Cujus demonstratio ex superiori æquatione & constructione sponte sua sequitur*.

PROBL. VI.

A dato puncto E *rectam ducere, quæ datum circulum tangat*. Fig. 20.

Punctum E positione datur, circulus vero $AEGD$ positione & magnitudine; proinde ducta AE, dantur AD & DE. Sit ergo $AD = a$, $DE = b$ & $EG = x$; producta autem AD in B, erit tota $BE = 2a + b$, & $BE \times ED = \overline{EG}^2$ *per* 36. *l.* 3. *Eucl.* hinc habetur æquatio

$$2ab + b^2 = x^2$$

$$x = \sqrt{b^2 + 2ab}$$

Constr. Centrum circuli A & punctum datum connectantur recta AE, super qua describatur semicirculus AEG, in quo ducantur chordæ AG & EG.

Demonstr. Angulus AGE in semicirculo rectus est *per Prop.* 31. *l.* 3. ergo $\overline{AE}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{EG}^2$ *per* 47. *l.* 1. hoc est $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + x^2$, seu $x^2 = 2ab + b^2$, proinde $x = \sqrt{2ab + b^2} = EG$.

Verum

Verum demonſtratio ſynthetica unico verbo poteſt abſolvi. Nam angulus AGE in ſemicirculo eſt rectus; ergo EG circulum tangit in G *per* 16. *l.* 3. Quod erat &c.

PROBL. VII.

Dato circulo invenire latus trianguli æquilateri in eodem circulo inſcribendi. Fig. 21.

Sit $AB = x$ latus trianguli quæſiti, & ducatur chorda BC æqualis ſemidiametro $CD = a$, quæ erit latus hexagoni *per* 15. *l.* 4. *Eucl.* eritque $AC = 2a$. Ob angulum ABC in ſemicirculo rectum $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$, hoc eſt

$$xx + a^2 = 4a^2$$
$$xx = 3a^2$$
$$x = \sqrt{3a^2}$$

Eſt ergo latus trianguli æquilateri medium proportionale inter circuli, cui inſcribitur, radium, ejuſque triplum, nempe inter a & $3a$. Hinc ſi ponatur $a = 1$, erit trianguli æquilateri latus ad radium ut $\sqrt{3}$ ad 1.

Conſtructio tamen facilior eſt, quæ vulgo traditur. (*Fig.* 22.) Super diametro AB deſcribatur triangulum æquilaterum ABC, & ducatur CD, erit CD latus quæſitum. Nam in triangulo rectangulo CDB erit $CB = 2a$, $DB = a$, & $CD = x$, unde $x = \sqrt{3aa}$.

COROLL. *Hinc infertur non omnes concinniores conſtructiones Geometricas ex calculo Analytico derivari, nec pro-*

 inde

inde eidem ſemper eſſe inhærendum, cum in ſolutione problematum Geometricorum elegantiora quandoque media operantis ingenium, quam talis determinata æquatio ſuppeditet, quæ quidem reſpicit problema illud ſolitarie ſumptum & ab omnibus aliis independens, ut Cl. Wolfius *obſervat, & ex hoc ipſo problemate intelligi poteſt: quod quidem multis aliis modis eleganter & a ſuperiori æquatione independenter conſtruitur.*

SCHOL. *Ex penultima æquatione habetur egregium theorema, quod eſt Prop.* 12. *lib.* 13. *Euclidis*: Si in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur, quadratum ex trianguli latere triplum eſt ejus, quod fit ex circuli ſemidiametro. *Nam ſi ponatur* $BC = a$, & $AC = 2a$, *erit* $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$, *proinde* $\overline{AB}^2 = 3a^2$, & $\overline{AB}^2 . \overline{BC}^2 :: 3a^2 . a^2 :: 3 . 1$. *adeoque* BC, *ſeu* $CD = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$. Fig. 21.

PROBL. VIII.

Rationem invenire, quam pentagoni latus habet ad hexagoni & decagoni ſimul ſumpta latera in eodem circulo inſcriptorum. Fig. 23.

SIt *AC* latus pentagoni, diviſoque biſariam arcu *AC* in *B*, chorda *AB*, ſeu *BC* erit latus decagoni; & circuli radius *AF*, vel *FC* latus hexagoni, ut patet. Ducatur *FD* perpendiculariter ſuper *AB*, quam biſariam ſecabit in *D per* 3. *l.* 3. & ducatur *EB*. Duo triangula *ACF*, *ECF* ſunt æquiangula & ſimilia; nam præter angulum communem *C*, angulus *CFE* = *FAC*: eſt enim arcus *BC* gr. 36.
& *BD*

& BD gr.18. ergo totus DC, nempe angulus CFE, gr.54. Similiter cum in trigono isoscele AFC angulus ad centrum sit gr. 72., erunt singuli ad basim gr. 54. proinde $FAC = CFE$.

Sit $AF = a$, $AC = b$, $EC = x$, erit $AE = b - x$, $AB = c$. Ratione triangulorum similium ACF, ECF est $AC . AF :: AF . EC$, hoc est $b . a :: a . x$, hinc $bx = aa$. Deinde triangulum isoscele AEB simile est triangulo isosceli ABC. Habent enim angulum A communem, proinde omnes alios æquales, ut patet. Sunt ergo proportionales $AE . AB :: AB . AC$, hoc est $b - x . c :: c . b$, unde $bb - bx = cc$. Addatur huic altera æquatio, habetur $bb = aa + cc$, hoc est latus pentagoni regularis potest latera hexagoni & decagoni eidem circulo inscriptorum, ut in *Prop.* 10. *lib.* 13. proposuit Euclides.

PROBL. IX.

Dato quadrato ABCD, *ex angulo* A *ducere rectam* AE, *ut pars* FE *a latere* DC *continuato intercepta sit æqualis datæ rectæ* M. Fig. 24.

Ex puncto E demittatur EG perpendicularis ad AE, quæ lateri producto AB occurrat in G. Ducta perpendiculari EH, facile erit ostendere EG æqualem esse AF: cum triangula EHG & ABF sint rectangula, similia *per Prop.* 8. *lib.* 6. & etiam æqualia; & $EH = CB = AB$, proinde EG & AF latera homologa & æqualia.

Sit ergo AB, vel $BC = a$, $FE = M = b$, $AF = EG = y$, & $BG = x$, erit $AE = y + b$, & $AG = a + x$.

 Tum

Tum ob triangula similia ABF & AEG, erit $AB \cdot AF ::$ $AE \cdot AG$, hoc est $a \cdot y :: y + b \cdot a + x$; unde habetur $aa + ax = yy + by$. Deinde ob triangulum AEG rectangulum in E, $\overline{AG}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EG}^2$, hoc est $a^2 + 2ax + x^2 = 2y^2 + 2by + bb$. In hac secunda æquatione ponatur pro $y^2 + by$ ejus valor ex prima inventus $aa + ax$, habebitur $aa + 2ax + x^2 = 2a^2 + 2ax + b^2$, quæ reducitur ad simplicissimam secundi gradus $xx = aa + bb$, atque $x = \sqrt{aa + bb} = BG$.

Constr. (*Fig.* 25.) Producatur quadrati latus AD in O, ita ut AO sit æqualis rectæ datæ M, erit $\overline{BO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AO}^2$ (ob triangulum rectangulum OAB) $= aa + bb$, & $BO = \sqrt{aa + bb} = x$. Producatur ergo latus AB in G, ita ut BG sit æqualis BO, & super AG diametro describatur semicirculus AEG, qui secabit quadrati latus DC productum in E, & conjungatur AE, erit EF recta quæsita.

Schol. *Hæc constructio eadem est, quæ a Pappo fuit allata, & a Cartesio indicatur, tum ad usum reductionis æquationum ostendendum, tum ad docendum nos plurimum interesse unam vel aliam quantitatem incognitam assumere. Sive enim pro incognita assumatur* BF, *sive* FC, *vel* AF *aut* CE, *semper oritur æquatio biquadratica. Sumpta autem* BG, *prodit æquatio simplicissima secundi gradus, ut vidimus. Jure igitur in hoc ipso problemate solvendo post Cartesium recentiores Analystæ fere omnes ingenium suum exercuerunt, apud quos illud passim invenias.*

PROBL.

PROBL. X.

Circulum invenire datæ superficiei conicæ æqualem. Fig. 26.

Sit circuli quæsiti radius $= x$, & ratio radii ad peripheriam sit $r.p$. Si fiat $r.p :: x.\frac{px}{r}$, erit $\frac{px}{r}$ peripheria circuli; & inde innotescit area circuli $= \frac{px^2}{2r}$ *per Coroll.* 1. *Propos.* 5. *Archim. ex Tacquet.*

Sit coni dati latus $= a$, peripheria circuli basis ejusdem $= p$, erit superficies conica $= \frac{1}{2} ap$ *per Coroll.* 1. *Prop.* 13. *ex Archim. cit.* Erit ergo ex hypothesi $\frac{px^2}{2r} = \frac{1}{2}ap$, & multiplicando per $2r$

$$px^2 = arp$$
$$x^2 = ar$$
$$x = \sqrt{ar}$$

COROLL. *Hinc oritur Archimedis theorema*: Circulus, cujus radius est medius proportionalis inter coni recti latus & radium basis conicæ, æqualis est superficiei conicæ. *Est ejusdem Prop.* 13. *de Sphæ. & Cylin.*

Demonstr. (*Fig.* 26. & 27.) Sit conus rectus datus R. Fiat circulus MLN, cujus radius OL sit medius proportionalis inter coni latus AB, & conicæ basis radium BC: hoc est ponatur radius OL medius proportionalis inter AB & BC;

& BC; erit *per Prop.* 7. *Archim. cit.* peripheria BED ad peripheriam MLN ut BC ad OL, sive ut OL ad AB: proinde rectangulum sub prima, nempe peripheria BED & quarta AB, sive ejus dimidium (nempe triangulum, cujus basis est peripheria BED & quarta AB altitudo) æquatur rectangulo sub secunda, seu peripheria MLN & tertia OL, seu triangulo sub eadem secunda MLN & tertia OL, quod est ejusdem rectanguli dimidium. Sed triangulum, cujus basis est peripheria BED, & altitudo AB æquatur dati coni superficiei *per Coroll.* 1. *Propos.* 13. *ex Archim. cit.* & triangulum sub peripheria MLN & tertia OL æquatur circulo OLM *per Propos.* 5. *ex Archim. cit.* ergo habetur circulus æqualis conicæ superficiei quæsitus. Quod &c.

PROBL. XI.

Dato cono recto ABC, *circulum invenire æqualem superficiei conicæ* BDCE *planis parallelis* BC & DE *interceptæ*. Fig. 28.

Sectus sit conus per axem triangulo ABC, erunt rectæ BC & DE parallelæ *per Prop.* 16. *l.* 11. *Eucl.* cum sint sectiones communes ejusdem trianguli cum planis parallelis BHC & DEL. Sit coni latus $AB = l$, $AD = m$, erit $BD = l - m$: item esto BF radius circuli basis $= r$, DG radius circuli paralleli $= s$, & circuli quæsiti radius $= x$. Ob triangula similia ABC & ADE est $AB . BF :: AD . DG$, hoc est $l . m :: r . s$, atque hinc $ls = mr$, & $ls - mr = 0$.

Superficies autem conica ABC æquatur circulo (*per Theor.*

Theor. præc.) cujus radius $= \sqrt{lr}$, seu cujus radii quadratum $= lr$: item superficies conica *ADE* æquatur circulo, cujus radius $= \sqrt{ms}$, seu cujus radii quadratum $= ms$; erit ergo radius circuli quæsiti, sive ejus quadratum

$$x^2 = lr - ms$$

$$x = \sqrt{lr - ms}$$

COROLL. *Si superior æquatio* $x^2 = lr - ms$ *in proportionem resolvatur, erit* $l - m . x :: x . r + s$. *Nam* $\overline{l - m} \times \overline{r + s} = lr + ls - mr - ms$. *Inventum autem fuit supra* $ls - mr = 0$, *proinde* $\overline{l - m} \times \overline{r + s} = lr - ms$; *atque hinc oritur theorema Archimedis, quod est Propos.* 15. *de Sphær. & Cylin.* Circulus habens radium proportione medium inter interceptam parallelis planis *BC* & *DE* partem lateris *DB* $(= l - m)$ & summam radiorum $BF + DG$ $(= r + s)$ circulorum, qui sunt in planis parallelis, æquatur superficiei conicæ *BDCE* parallelis planis interceptæ.

PROBL. XII.

Dato cylindro sphæram æqualem invenire. Fig. 29. & 30.

SUpponatur factum, & sphæra *M* sit æqualis cylindro *ABCD*. Concipiatur sphæræ *M* circumscriptus cylindrus *EFGH*, habens tam latus *FH*, quam diametrum basis *HG*, utrunque æquale diametro sphæræ *LN*; erit cylindrus

lindrus $EFGH$ ſphæræ circumſcriptus ejuſdem ſeſquialter, hoc eſt $= \frac{3}{2}$ ſphæræ *per Propoſ.* 32. *Archim. ex Tacquet.* Proinde ſi fiat $PC = \frac{3}{2} DC$, erit cylindrus $BP = \frac{3}{2}$ cylindri BD *per Prop.* 14. *l.* 12. & æqualis cylindro circumſcripto $EFGH$, cum ſphæra & cylindrus BD ex hypotheſi ſint æquales.

Sit jam cylindri dati diameter $BC = a$, altitudo $DC = b$, erit altitudo $PC = \frac{3}{2} b$. Sit autem ſphæræ diameter LN, vel $FH = x$.

In cylindris æqualibus BP & FG erit baſis BCK ad baſim GHZ (vel quadrata diametrorum earundem $\overline{BC}^2$, $\overline{GH}^2$ *per Prop.* 2. *l.* 12.) ut reciproce altitudo FH ad altitudinem PC, hoc eſt

$$a^2 . x^2 :: x . \tfrac{3}{2} b$$

$$x^3 = \tfrac{3}{2} a^2 b$$

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{3}{2} a^2 b}$$

Ex quo patet problema eſſe ſolidum, & ad ejus ſolutionem duas medias proportionales eſſe inveniendas inter a & $\frac{3}{2} b$; nempe $\div a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}$. Nam ex quadratis diametrorum a^2 & x^2 habentur tres continue proportionales $\div a, x, \frac{x^2}{a}$ *per Prop.* 20. *l.* 6. *Eucl.*, ex ſuperiori autem æquatione $x^3 = \frac{3}{2} a^2 b$ eruitur $\frac{x^3}{a^2} = \frac{3}{2} b$ dividendo per a^2, proinde $\div a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{3}{2} b$.

SCHOL.

SCHOL. *Egregium hoc Archimedis problema, quod ipse statim initio* lib. 2. de Sphæ. & Cyl. *Analytico fere modo proposuit, illud deinde composuit per duas medias proportionales, & nos eodem modo, sed aliquanto brevius absolvemus.*

Demonstr. Sit $CD = \frac{2}{3} CP$, erit cylindrus $BD = \frac{2}{3} BP$ cylindri. Tum inter BC & CP inveniantur duæ mediæ proportionales LN & R per modum aliquem mechanicum ex allatis a P. Tacquet ad *Prop.* 13. *lib.* 6. *Eucl.* Dico LN esse diametrum sphæræ æqualis cylindro dato BD. Nam sphæræ M concipiatur circumscriptus cylindrus $EFGH$, cujus basis diameter & altitudo sint æquales diametro sphæræ LN, vel EG, erit eadem sphæra $= \frac{2}{3}$ cylindri circumscripti $EFGH$ *per Propos.* 32. *Archim. ex Tacquet*. Idem autem cylindrus circumscriptus æquatur cylindro BP. Nam cum sint quatuor continue proportionales BC, LN, R, CP, erit vicissim $BC . R :: LN . CP$ *per* 16. *lib.* 5. *Eucl.* Sed $BC . LN :: \overline{BC}^2 . \overline{LN}^2$. *per* 2. *lib.* 12. *Eucl.* ergo erit BC ad LN, basis ad basim, ut LN vel EG altitudo cylindri GF ad CP altitudinem cylindri BP; ergo hi duo cylindri æquantur *per* 15. *l.* 12. *Eucl.* proinde etiam sphæra M & cylindrus BD æquabuntur, cum ambo sint $= \frac{2}{3}$ æqualium cylindrorum BP, GF. Quod &c.

APPENDIX

De constructione problematum solidorum.

CUm toties in hoc tractatu de resolutione problematum solidorum per curvas obtinenda mentio facta

ſit, abs re non erit hoc loco de illa breve aliquod ſpecimen exhibere. Cum autem nulla ſit methodus, quantum ego opinor, Carteſiana brevior, aut facilior, quæ nimirum circulum duntaxat & parabolam adhibet, hanc ipſam ex Cl. Halleii ([a]) annotatis explicare conabimur, præmiſſis, quæ ad rei intelligentiam viam ſternunt. Hæc autem methodus ſecundum terminum ex æquatione ſublatum petit.

DEFINITIONES.

I. Curva *Algebraica* illa dicitur, quæ per æquationem Algebraicam definiri poteſt; vel illa, in qua per lineas rectas explicari poteſt ratio, quam ſingula curvæ puncta ad axem, vel diametros dicunt. Sic in circulo *AMB* (*Fig.* 31) ex quovis diametri puncto *P* ducta perpendiculari *PM*, ponatur $AB = a$ & $AP = x$, erit $BP = a - x$; ſit $PM = y$, erit $\overline{MP}^2 = AP \times PB$ *per Propoſ.* 35. *lib.* 3. *Eucl.*, hoc eſt $yy = ax - xx$; & cum talis æquatio, ſeu circuli proprietas ſemper eadem reperiatur ex quocunque diametri puncto ducatur perpendicularis *PM*, dicitur *æquatio circuli*, & ipſe circulus *curva Algebraica*, licet ob ſummam in ejus deſcriptione facilitatem tanquam figura plana conſideretur. Perpendicularis *PM* dicitur *ſemiordinata*, ſeu *applicata* ad axem, vel ad diametrum *AB*; portio vero diametri *AP* dicitur *abſciſſa*. Utraque quantitas dicitur *variabilis*, quia utraque creſcit & decreſcit, adeoque exprimi ſolent per *x* & *y*. *Semidiameter* vero circuli, & in parabola aliiſque curvis

(a) In Tranſact. Anglicanis n. 183. p. 335.

curvis *latus rectum*, seu *parameter*, dicuntur quantitates *constantes*: nam aliis crescentibus, vel decrescentibus, ipsæ eædem manent.

II. *Parabola* est curva Algebraica (*Fig.* 32.) in qua semiordinatæ quadratum æquatur facto ex abscissa in parametrum. Sit parabola BAC, cujus vertex punctum A, recta AD indefinite producta *axis*, AL *latus rectum*, seu *parameter*: perpendiculares ad axem PM, pm, dicuntur *semiordinatæ*; AM, vel Am *abscissæ*. Quælibet vero recta ON, vel PQ axi AD parallela dicitur *Parabolæ diameter*.

Ponatur semiordinata $PM = x$, & abscissa $AM = y$, parameter $AL = a$; cum *ex Propos.* 11. *lib.* 1. *Conic. Apollonii* sit $\overline{MP}^2 = AM \times AL$, erit $xx = ay$: quæ quidem est proprietas & natura parabolæ, quæ per talem æquationem Algebraicam designatur.

COROLL. *Est ergo* $x = \sqrt{ay}$, *hoc est semiordinata* MP *est media proportionalis inter parametrum* AL *&* *abscissam* AM. *Nam* $a . x :: x . y$, *unde* $x = \sqrt{ay}$.

PORISMA I.

Parabolam in plano describere. Fig. 33.

SInt in eodem plano duæ rectæ AZ & BX indefinite productæ, & ad angulos rectos sibi invicem occurrentes in A. Sumatur in AZ parametri longitudo AD, & in BX axis AB. Tum ex puncto D ducatur DE axi AB parallela. Postea sumantur aliæ duæ rectæ AR & CT, quarum prior AR circa punctum fixum A revolvatur, al-

tera vero CT, servato semper ad axim AB, vel ad diametrum DE situ parallelo, progrediatur in recta AZ, quæ rectæ tamen sic moveantur, ut jugiter sit $DF = AC$. Nam si notentur puncta intersectionum duarum illarum rectarum AR & CT, prodibit curva quæsita, quam dico esse parabolam.

Demonstr. Ex aliquo curvæ puncto M ducatur recta MP parallela rectæ AD & ad axem AB ordinata, erit $MP = AC$, & $CM = AP$ *per Prop.* 44. *l.* 1. *Eucl.* Jam vero ob triangula similia FAD & MAC est $AD \cdot DF$ (seu AC ex constructione) :: $AC \cdot CM$, seu AP. Habetur ergo AC, seu PM ($= x$) media proportionalis inter AD parametrum ($= a$) & abscissam AP ($= y$), proinde $x^2 = ay$, ideoque curva AFL est parabola *ex Defin.* 2. *hujus*.

Schol. *Ad praxim loco rectarum* AR *&* CT, *quas modo explicato moveri concipimus, apponi solent duæ regulæ mobiles, quarum prima circa clavum in* A *fixum revolvatur, altera in situ ad axem parallelo progreditur, ex quarum mutua intersectione habentur puncta pro descriptione parabolæ, ut Fig.* 34. *satis ostendit.*

PORISMA II.

Parabolam in plano alia ratione describere. Fig. 35.

Parabolæ parameter AL producatur indefinite in N, & ex puncto A, quod erit parabolæ vertex, elevetur perpendicularis indefinita AO. Deinde sumptis in NL centris quotcunque pro arbitrio (circino tamen usque ad

L

L aperto) fiant arcus rectam *AO* interfecantes in punctis *M*, *M*, *M*, tum etiam rectam *AN* in punctis *P*, *P*, *P*. Patet quamlibet ex his *AM* esse mediam proportionalem inter datam parametrum *AL* & abscissas *AP*, *AP*, *AP* *per Coroll. Prop.* 13. *l.* 6. *Eucl. ex Tacquet.* Igitur positis pro parametro *AL*, & *AQ* pro axe parabolæ describendæ, si abscissæ *AP*, *AP*, *AP* transferantur in axem *AQ* in punctis 1, 2, 3 &c. & ex iisdem punctis ducantur ad axem *AQ* normales 1*N*, 2*N*, 3*N* &c. quæ æquales sint ipsi *AM*, *AM*, *AM* &c. curva per extrema harum perpendicularium transiens erit parabola *BAC*. Quæ quidem parabolæ descriptio ceteris longe tutior esse censetur, cum mechanicis instrumentis, quæ plerunque vitio laborant, minus sit obnoxia. Innititur autem *Coroll. post defin.* 2. ut patet.

PROPOSITIO I.

Explicatur constructionis Cartesianæ methodus. Fig. 36.

1. Describatur parabola *OAN per Porif.* 1. *aut* 2. cujus vertex *A* & axis *AQ*, parameter autem *AL* ponatur $a = 1$, & transferatur parametri dimidium $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$ ex vertice *A* in *C*.

2. Ex puncto *C* fecetur $CD = \frac{1}{2}p$ in ipso axe deorsum, si in æquatione habeatur $-p$; vel sursum retrogrediendo versus *A*, si fuerit $+p$, & producendo (si opus sit) axem ad partes ipsius *A*. Quod si punctum $p = 0$, hoc est si æquatio tertio termino careat, tunc *CD* non ducitur.

3. Ex

3. Ex puncto D (vel ex C, si desit CD) erigatur ad axem perpendicularis $ED = \frac{1}{2} q$ dextrorsum quidem si fuerit in æquatione $-q$ (ut in hac figura) at sinistrorsum si fuerit $+q$, erit EA radius circuli describendi.

4. Centro E cum intervallo AE describatur circulus, qui parabolam secat in punctis O, B, N, ex quibus ducta ad axem perpendicula OP, BC & FN dant radices æquationis quæsitas; hoc est, quæ sunt ad axis dexteram (ut FN) semper sunt veræ, quæ vero ad sinistram ut BC, & OP sunt falsæ. Hæ simul sumptæ radicem veram FN æquare debent, cum æquatio cubica secundo termino careat, ut supponitur. At quæ sequuntur exempla rem clare ostendunt.

SCHOL. *Ratio hujus methodi a locorum Geometricorum doctrina pendet, quæ docet modum combinandi circulum cum parabola, ceterisque sectionibus Conicis, sublatis incognitarum secundis terminis. Sed* Cartesius *rem dissimulavit, sola praxi contentus. Nos digitum ad fontem tantummodo intendimus, ne propositæ appendicis limites transgrediamur.*

PROPOSITIO II.

Æquationum Cubicarum constructio exemplis illustratur. Fig. 37.

I. Construenda sit æquatio $x^3 - px - q = 0$. Describatur parabola *per Poris.* 1. *vel* 2. OAN, cujus parameter AL sit $a = 1$, vertex A, & axis AQ. Sumatur $AC = \frac{1}{2} a = \frac{1}{2}$, & $CD = \frac{1}{2} p$. Deinde elevetur

ex

ex puncto D perpendicularis $ED = \frac{1}{2} q$ dextrorsus quidem ob $-q$; & centro E cum intervallo EA describatur circulus OAN, qui secabit parabolam in punctis O, B, & N, ex quibus ducta perpendicula OP, BC, FN dant propositæ æquationis radices, duas quidem falsas OP & BC ad sinistram axis, & tertiam FN veram ad dexteram, quæ duabus prioribus æquatur.

Demonstr. Sit $FN = x$, ut supponitur; abscissa $AF = y$, & parameter $AL = 1$, erit ex natura parabolæ $\overline{FN}^2 = AF \times AL$, hoc est $x^2 = 1y$ *per Defin.* 2. unde $AF = x^2$, & FD (seu EM) $= AF - AC - CD = x^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} p$. Item $MN = FN - FM$ (seu DE) $= x - \frac{1}{2} q$, adeoque in triangulo rectangulo EMN erit $\overline{EN}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{MN}^2$ $= x^4 - px^2 - qx + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4} pp + \frac{1}{4} qq + \frac{1}{4}$.

Similiter in triangulo rectangulo ADE erit $\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = \frac{1}{2} p + \frac{1}{4} pp + \frac{1}{4} qq + \frac{1}{4}$. Ex radiorum autem AE, EN æqualitate habetur æquatio, proinde deletis utrinque terminis similibus remanet

$$x^4 - px^2 - qx = 0$$
$$x^3 - px - q = 0$$

Quod si sumatur aliqua ex radicibus falsis v. g. $OP = -x$, eadem manet demonstratio. Nam sit abscissa $AP = y$, semiordinata $OP = -x$, parameter $AL = 1$, erit ex natura parabolæ *per Defin.* 2. $\overline{OP}^2 = AP \times AL$, hoc est $x^2 = 1y$; unde $AP = x^2$. Est autem $PT = DE$ ($= \frac{1}{2} q$); unde

unde OT $(=OP+PT)=-x+\frac{1}{2}q$, & $AD=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p$; proinde DP $(=DA-AP)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p-x^2$.

Jam in triangulo rectangulo ETO est $\overline{EO}^2=\overline{OT}^2+\overline{ET}^2$ seu $\overline{DP}^2=x^4-px^2-qx+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}pp+\frac{1}{4}qq+\frac{1}{4}$. Item in triangulo rectangulo EDA est $\overline{AE}^2=\overline{AD}^2+\overline{DE}^2=\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}pp+\frac{1}{4}qq+\frac{1}{4}$, adeoque ob radiorum EO & AE æqualitatem habetur æquatio; deletis proinde utrinque terminis similibus, remanet

$$x^4-px^2-qx=0$$
$$x^3-px-q=0$$

II. Sit æquatio construenda $x^3+px-q=0$, seu $x^3+3x-6=0$. Descripta parabola (*Fig.* 38.) NAM, cujus axis AO, vertex A. Assumpta parametro $=1$, secetur $AC=\frac{1}{2}$, & sumatur CD $(=\frac{1}{2}p)=\frac{3}{2}$ supra punctum A, cum adsit in æquatione $+p$. Elevata deinde perpendiculari ad axem ED $(=\frac{1}{2}q)=3$, dextrorsum ob $-q$, fiat centrum in E, & intervallo EA describatur circulus EAM, qui parabolam secat in unico puncto M, ex quo ducta normalis PM ad axem dat radicem veram PM.

Demonstr. Producta PM in F, cui occurrat perpendicularis EF demissa ex puncto E, quæ parallela & æqualis erit ipsi DP, ut patet; sit $AC=\frac{1}{2}$, $CD=\frac{1}{2}p$, $ED=PF=\frac{1}{2}q$, $PM=x$, $AP=y$, & parameter $=1$. Erit FM $(=PF-PM)=\frac{1}{2}q-x$, & DA $(=DC-AC)=\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}$.

Jam

Jam ex natura parabolæ $\overline{PM}^2 = 1 \times AP$, hoc eſt $xx = 1y$, unde $AP = xx$, & $PD \; (= PA + AD) = xx + \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$. Ob duo triangula rectangula EDA, EFM eſt $\overline{AE}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{AD}^2 = \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp - \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$. Similiter $\overline{EM}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{MF}^2 = x^4 + px^2 - qx + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp - \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$. Sed EA & EM ſunt æquales, ergo & eorum quadrata, proinde habetur æquatio, & deletis terminis ſimilibus utrinque, remanet

$$x^4 + px^2 - qx = 0$$
$$x^3 + px - q = 0$$

Surrogatis autem valoribus p, q, erit $x^3 + 3x - 6 = 0$.

COROLL. *Ubi circulus parabolam non ſecat (ut in hoc caſu) niſi in unico puncto, ſignum eſt alias duas æquationis datæ radices eſſe imaginarias. Quod optime convenit cum iis, quæ diximus in* Propoſ. 4. Cap. 9. *nimirum duas radices imaginarias haberi, ſi in æquatione fuerit* $+p$.

III. Conſtruenda ſit æquatio $x^3 + px + q = 0$, ſeu $x^3 + 1x + 1 = 0$. Deſcribatur parabola (*Fig.* 39.) cujus parameter $= 1$, vertex A, axis AR. Secetur $AC = \frac{1}{2}$, & a puncto C verſus A ſumatur $CD = \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}$. Punctum D cadit præciſe in A, & ex puncto A, vel D ducatur perpendicularis $AE = \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}$ ſiniſtrorſus ob $+q$, factoque centro in E cum intervallo EA, fiat circulus EAF ſecans parabolam in F, ex qua interſectione ducta ad axem normali FM, habetur radix falſa FC (cum ſit ad axis ſiniſtram) & aliæ duæ imaginariæ *ex ſuper. Coroll.*

Demonstr. Sit parameter $AL = 1$, abscissa $AC = y$, & applicata FC ex hypothesi $= -x$, erit ex natura parabolæ $\overline{FC}^2 = AC \times AL$, hoc est $x^2 = 1y$, unde AC, seu EN (quæ ex centro E ducitur ad FC perpendicularis) $= x^2$, & ED, seu $NC = \frac{1}{2}$; ideoque $FN = (FC - CN) = -x - \frac{1}{2}$. Jam igitur in triangulo rectangulo ENF est $\overline{EF}^2 = \overline{EN}^2 + \overline{FN}^2$, hoc est

$$\frac{1}{4} = x^4 + x^2 + 1x + \frac{1}{4}$$

$$x^4 + x^2 + 1x = 0$$

$$x^3 + x + 1 = 0$$

SCHOL. *Si circulus parabolam tangit, duæ intersectiones coincidunt perinde ac illam in duobus punctis perexiguo ac fere nullo intervallo distantibus secaret, & sectiones illæ in puncto contactus coirent; adeoque tunc æquatio duas habet radices æquales. Quod si eam nec tangit, nec secat, radices omnes sunt impossibiles.*

PROPOSITIO III.

Æquationes biquadraticas construere. Fig. 40.

DEscripta parabola cum parametro, vertice & axe omnino ut *in præc. Prop.* factum est, debet insuper pro æquatione biquadratica construenda augeri, vel minui circuli describendi radius AE; hoc est si in æquatione fuerit $-r$, additur; si fuerit $+r$, subtrahitur ex quadrato radii AE rectangulum ar factum ex parametro a & ex

ex data quantitate r. Nam circuli hujus interſectiones cum parabola dant quæſitas æquationis radices, veras quidem ſemper ad axis dexteram, falſas ad ſiniſtram. Res fiet exemplis clariſſima.

I. Conſtruenda ſit æquatio $x^4 - qx - r = 0$, quæ præter ſecundum etiam tertio termino caret. Deſcripta parabola FAG, cujus latus rectum $AL = a = 1$, vertex A; axis AN, ex puncto C dextrorſum (ob $-q$) elevetur normalis $CE = \frac{1}{2}q$. Circuli deſcribendi radius AE augeri debet ob $-r$ rectangulo ar. Igitur producatur AE hinc inde indefinite, & AB ſecetur æqualis parametro $AL = a$, $AS = r$. Tum deſcripto ſuper BS ſemicirculo BDS, & ex puncto A elevata perpendiculari AD ad diametrum BS, erit $\overline{AD}^2 = BA \times AS = ar$, ductaque ED, erit $\overline{ED}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2$. Habetur ergo DE circuli deſcribendi radius quæſitus auctus rectangulo ar; factoque centro E cum intervallo ED, fiat circulus DRG, qui parabolam ſecabit in punctis R & G, ex quibus ducta ad axem perpendicula RM & NG dant radices æquationis propoſitæ, NG veram utpote ad axis dexteram, & MR falſam ad ſiniſtram. Ducatur ex puncto E perpendicularis EQ.

Demonſtr. Sit $NG = x$, & abſciſſa $AN = y$. $\overline{AD}^2 = AB \times AS = ar$, unde $AD = \sqrt{ar}$. $QG = CE - NG = \frac{1}{2}q - x$; & ex natura parabolæ $\overline{NG}^2 = NA \times a$, nempe $x^2 = ay$, atque hinc $y = \frac{xx}{a} = AN$. Similiter EQ $(= AN - AC) = \frac{xx}{a} - \frac{1}{2}a$.

 Jam

Jam in triangulo rectangulo ECA est $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 = \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa$. Item in triangulo rectangulo EQG est $\overline{EG}^2 = \overline{QG}^2 + \overline{EQ}^2 = \frac{x^4}{a^2} - qx + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa$. Tandem in triangulo EAD est $\overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2 = \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa + ar$. Igitur ob æqualitatem radiorum ED & EG erit

$$ar = \frac{x^4}{a^2} - qx$$

$$x^4 - a^2qx = a^3r$$

(ob $a = 1$) $$x^4 - qx = r$$

$$x^4 - qx - r = 0$$

Idem demonstrari potest assumpta radice negativa $RM = -x$.

II. Sit (*Fig.* 41.) construenda æquatio $x^4 - 5x^2 + 2x + \frac{5}{2} = 0$, seu $x^4 - px^2 + qx + r = 0$. Describatur parabola, cujus latus rectum $a = 1$, vertex A, & axis AD, in quo secetur $AC = \frac{1}{2}$ & $CD = \frac{1}{2}p$. Tum sinistrorsum ob $+q$ elevetur perpendicularis ad axem $DE = \frac{1}{2}q$. Liquet ex dictis minuendum esse ob $+r$ circuli describendi radium rectangulo ar. Proinde producta utrinque AE indefinite, secetur $AB = a$, & $AH = r$: tum super diametro BH describatur semicirculus HMB, & ex puncto A elevetur perpendicularis AM. Similiter super AE describatur semicirculus ANE, in quo ducatur chorda $= AM$; seu (quod idem est) secetur arcus AN, posito circino in A cum intervallo AM. Igitur intervallum EN erit radius quæsi-

quæsitus circuli centro E describendi. Nam $\overline{EN}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AN}^2$ in triangulo rectangulo ENA, & $\overline{AN}^2 (= \overline{AM}^2) = BA \times AE = ar$. Itaque descripto sic circulo, parabola intersecatur in punctis G, F, P & Q, ex quibus demissæ ad axem normales Gc, FR, OP & CQ, habentur quatuor æquationis datæ radices, duæ quidem ad axis dexteram veræ, & duæ falsæ ad sinistram.

Demonstr. Sumatur quælibet radix v. g. $OP = x$, & sit abscissa $AO = y$, erit ex natura parabolæ $\overline{OP}^2 = AO \times a$, hoc est $x^2 = ay$, atque hinc $y = \frac{x^2}{a} = AO$. Deinde $\overline{AM}^2$, seu $\overline{AN}^2 = BA \times AH = ar$, unde $AN = \sqrt{ar}$; & in triangulo rectangulo ENA (ductis rectis EN & AN) erit $\overline{EN}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AN}^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}q^2 - ar$.

Similiter quia $PK = x + \frac{1}{2}q$, & OD, seu $EK = AO - AC - CD = \frac{x^2}{a} - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}p$, in triangulo rectangulo EKP erit $\overline{EP}^2 = \overline{EK}^2 + \overline{PK}^2 = \frac{x^4}{a^2} - \frac{px^2}{a} + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}p^2 + qx + \frac{1}{4}q^2$. Igitur propter radiorum EP & EN æqualitatem habetur æquatio

$$\frac{x^4}{a^2} - \frac{px^2}{a} + qx = -ar$$

$$x^4 - apx^2 + a^2qx + a^3r = 0$$

Hinc

Hinc posito $a = 1$, & surrogatis valoribus p, q & r, erit $x^4 - 5x^2 + 2x + \frac{5}{2} = 0$, qualis proposita fuit.

COROLL. *Constructiones æquationum tertii & quarti gradus fere omnino conveniunt. In hoc tamen differunt, quod in cubicis circulus transit per parabolæ verticem, non autem in biquadraticis.*

SCHOL. I. *Præclara hæc* Cartesii *methodus id incommodi nonnullis habere visa est, quod secundum æquationis terminum, si adsit, tolli jubeat. Huic molestiæ* Thomas Bakerus ([a]) Anglus *occurri posse animadvertit, si loco axis parabolæ, uti* Cartesius *fecit, adhiberetur aliqua parabolæ ipsius diameter, ad quam ducerentur ex intersectionibus parabolæ & circuli ea perpendicula, quæ ut vidimus, dant radices quæsitas. Hac regula, quam a ratione tradita circuli centrum determinandi*, Centralem *vocat, æquationes omnes cubicas & biquadraticas quomodolibet affectas & completas sine ulla prævia reductione construere docet. At vero tot illa nodis intricata est, & tot cautionibus de signis + & — obnoxia, ut remoto libro, vix possit quis omnes memoria retinere, ut* Cl. Hallejus ([b]) *testatur, qui multis annotationibus ei plurimum lucis attulit; quemadmodum deinde* Christophorus Sturmius ([c]) *&* Wolfius ([d]) *fecerunt, apud quos videant, qui volunt.*

SCHOL. II. *Sicuti parabolam & circulum mutuo intersecari vidimus, & inde obtineri datarum tertii & quarti gradus æquationum radices, ita circulus cum ellipsi, vel*

(a) Clavis Geometrica Cathol. Londini 1684 (b) Transf. Anglic. n. 188. p. 335. an. 1687. (c) Mathes. enucl. p. 349. (d) Construct. æquat. probl. 254.

vel hyperbole, aut duæ quælibet ex iisdem Conicis sectionibus pari ratione combinari possunt ad problemata cujuscunque gradus construenda, quemadmodum Dn. de la Hire (a) *&* Marchio (b) Hospitalis *egregie fecerunt. Nos duas medias continue proportionales ex duarum parabolarum intersectione mox inveniemus. Menechmus id primus docuit.*

PROBL. I.

Inter datas a *&* q *duas medias proportionales invenire.* Fig. 42.

I. Sit prior quæsita $= x$, erunt quatuor continue proportionales $a \cdot x \cdot \frac{x^2}{a} \cdot \frac{x^3}{a^2}$, proinde $\frac{x^3}{a^2} = q$, & $x^3 = aaq$, seu $x^3 - aaq = 0$.

Vel sic: sit prior quæsita $= x$, altera $= y$. Quoniam ex hypothesi $\div a \cdot x \cdot y \cdot q$ sunt continue proportionales, erit $a^2 \cdot x^2 :: x \cdot q$ *per Coroll. Prop.* 20. *l.* 6. *Eucl.* adeoque $x^3 = aaq$, seu $x^3 - aaq = 0$, ut prius.

Pro constructione descripta parabola FAP, cujus parameter $a = 1$, vertex A, & axis AQ, secetur $AC = \frac{1}{2}$, & ex puncto C elevetur normalis $CE = \frac{1}{2}q$ dextrorsum quidem ob $-q$. Tum centro E cum intervallo AE describatur circulus EAP, parabolam secans in puncto P, erit applicata PM radix quæsita $= x$.

Demonstratio a ceteris non differt, ductis recta EP & perpendiculo EN. Nam sit parameter $= a$, $AC = \frac{1}{2}a$,

EC

(a) Sections Coniques liv. 9. & 10. (b) Construct. des æquat. Analyt.

$EC = \frac{1}{2}q$, $AM = y$, & $MP = x$, erit PN ($= PM - MN$) $= x - \frac{1}{2}q$. Cum autem ex natura parabolæ sit $AM \times a = \overline{PM}^2$, hoc est $ay = xx$, erit $y = \frac{xx}{a}$, adeoque $AM = \frac{xx}{a}$, & MC, seu EN ($= AM - AC$) $= \frac{xx}{a} - \frac{1}{2}a$. Jam in triangulo rectangulo ENP est $\overline{EP}^2 = \overline{EN}^2 + \overline{PN}^2 = \frac{x^4}{aa} - qx + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq$; eademque ratione in triangulo rectangulo ACE est $\overline{EA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq$, quæ duæ æquationes sunt æquales ob æqualitatem radiorum ejusdem circuli EP & AE, proinde æqualibus utrinque detractis, remanet

$$\frac{x^4}{aa} - qx = 0$$

$$x^4 - aaqx = 0$$

$$x^3 - aaq = 0$$

COROLL. *Hinc habetur modus inveniendi inter duas datas tot medias proportionales, quot volueris. Sint datæ* a *&* q, *& quæsitarum prima* $=$ x. *Continuetur progressio Geometrica* $\div\!\!\div$ a . x . $\frac{x^2}{a}$. $\frac{x^3}{a^2}$. $\frac{x^4}{a^3}$. $\frac{x^5}{a^4}$. $\frac{x^6}{a^5}$ *&c. & numerus terminorum, qui binario superat quæsitarum proportionalium numerum, fiat æqualis alteri quantitati datæ* q. *Sic ut habeantur tres mediæ proportionales, fiat* $\frac{x^4}{a^3} = q$, *unde erit*

de erit

de erit $x^4 = a^3 q$. *Item si quærantur quatuor proportione mediæ, fiat* $\frac{x^5}{a^4} = q$, *erit* $x^5 = a^4 q$ *& sic de ceteris.*

II. Sint, ut prius, datæ a & q, inter quas inveniendæ sint duæ mediæ proportionales x & y, erit $a . x :: x . y$, unde $ay = x^2$. Similiter $x . y :: y . q$, adeoque $qx = y^2$, quæ duæ æquationes parabolæ naturam exprimunt *ex Defin.* 2. *hujus*. Ex prima habetur $y = \frac{x^2}{a}$; quo valore posito in secunda, oritur $qx = \frac{x^4}{a^2}$, atque hinc $x^3 = aaq$, seu $x^3 - aaq = 0$, ut superius.

Pro construct. (*Fig.* 43.) secent se ad angulos rectos in A duæ rectæ DB & EC. Secetur $AB = a$ datarum priori, & $AC = q$ alteri datæ. Tum super axe AD cum parametro AB describatur parabola AMP. Item super axe AE cum parametro CA describatur parabola AMN; & ex punctis interfectionum ducantur ad suos axes semiordinatæ MP & MN, erunt AN & AP duæ mediæ proportionales quæsitæ, hoc est $AB . AN :: AN . AP :: AP . AC$.

Demonstr. Sit $AN (= PM) = x$, & $AP (= MN) = y$, æquatio ad parabolam AMP est $\overline{PM}^2 = AP \times AB$, hoc est $x^2 = ay$. Eadem ratione æquatio ad parabolam MAN est $\overline{MN}^2 = AN \times AC$, hoc est $y^2 = qx$. Cum igitur ex priori habeatur $a . x :: x . y$, ex altera vero $x . y :: y . q$, evidens est in continua esse ratione $a . x . y . q$, nempe $AB . AN . AP . AC$. Quod &c.

COROLL. *Ex inventione duarum proportione mediarum sequitur celebratissima cubi duplicatio, quæ tandiu veterum Geometrarum mentem exercuit. Sint enim in continua proportione* a . x . y . q, *seu (positis* a = 1 *&* q = 2) 1 . x . y . 2 . *habebit prima* 1 *ad quartam* 2 *rationem triplicatam ejus, quam habet eadem prima* 1 *ad secundum* x per Defin. 10. lib. 5. Eucl. *Sed cubus ex prima* 1 *ad cubum ex secunda* x *habet pariter rationem triplicatam ejus, quam habet eadem prima* 1 *ad secundam* x, *hoc est quam habet* 1 *ad* 2 per Propos. 33. lib. 11. Eucl. *ergo cubus ex secunda* x *duplus est cubi dati* 1.

SCHOL. D. Guido Grandus ([a]) *celeberrimus in Academia Pisana Matheseos Professor Mesolabium expeditissimum pro inventione duarum mediarum inter duas datas publicavit Florentiæ anno* 1728., *cujus ope non modo dulicatio cubi, sed anguli quoque trisectio, divisio sphæræ in partes datæ rationis, & omne prorsus problema solidum potest facillime solvi.*

PROBL. II.

Datum angulum AED, *vel arcum* ABCD *in tres æquales partes dividere.* Fig. 44.

SUpponatur divisio jam facta in punctis *B* & *C*, erit chorda $AB = BC = CD$. Ducantur radii *EA*, *FB*, *EC* & *ED*, tum chorda *AD*; at *BN* sit parallela radio *CE*. Triangula *AEB*, *BEC*, *CED* sunt æqualia, isoscelia & similia, quod evidens est. Item triangula *EAB* & *BAR* simi-

([a]) Flores Geometrici in Appendice.

similia sunt: nam præter angulum ABR communem, angulo quoque ad centrum AEB æquatur angulus BAD ad circumferentiam *per Prop.* 20. *lib.* 3. *Eucl.* cum subtendat arcum duplum, unde EB, seu $EA \cdot AB :: AB \cdot BR$; & cum triangulum AEB sit isoscele, erit quoque BAR isoscele, proinde $AB = AR$. Idem omnino demonstrari potest de triangulo DEC respectu trianguli CMD, quod pariter est isoscele, unde $CD = MD$.

Jam in isoscele BAR anguli ABR & ARB ad basim æquantur, itaque angulus CBE ($= ABR$) $= BRA$, seu MRE ad verticem, ideoque BC & RM sunt parallelæ. At vero triangula ABR & BRN sunt æquiangula: nam, præter angulum communem BRN, angulus quoque NBR $=$ (ob parallelas BN, CM) $CEB = BEA = BAR$, & tertius $ABR = BNR$ tertio. Cum autem triangulum ABR sit isoscele, erit quoque NBR isoscele; hinc $BN = BR$, & ob triangulorum similitudinem, AR, seu $AB \cdot BR :: BR \cdot RN$. Erat autem $EA \cdot AB :: AB \cdot BR$; sunt ergo in continua ratione $EA \cdot AB \cdot BR \cdot RN$.

Sit jam radius $EA = 1$, chorda $AB = x$, erunt quatuor termini continuo proportionales $1 \cdot x \cdot x^2 \cdot x^3$. At quia in isoscele BAR est $AB = AR$, item in isoscele CDM est $CD = MD$, in parallelogrammo autem NC est $BC = NM$, sequitur chordam AD (quam voco q), addita NR, æqualem esse tribus rectis AB, BC & CD; hoc est $AD + NR = AB + BC + CD$, proinde $q + x^3 = 3x$. Habetur ergo æquatio $x^3 - 3x + q = 0$.

Constr. Describatur parabola (*Fig.* 45.) MAN, cujus parameter AL sit $a = 1$, vertex A, & axis AQ, in quo secentur $AC = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$, & CD ($= \frac{1}{2}p$) $= \frac{3}{2}$. Tum ex pun-

 cto D

cto D elevetur normalis ad axem $DE = \frac{1}{2} q$ ad finiftrum axis latus ob $+ q$. Factoque centro E cum intervallo EA fiat circulus $EANM$, fecans parabolam in punctis P, N & M; ex quibus ad axem applicata PT eft æqualis chordæ quæfitæ $AB = BC = CD$. At RN eft radix æqualis chordæ AF, quæ tripartito dividit alterum arcum AFD. Tertia MQ eft radix falfa duabus PT & RN veris æqualis.

Demonftr. Sit abfciffa $AT = y$, & femiordinata $TP = x$, parameter $AL = 1$; erit ex natura parabolæ $\overline{TP}^2 = AT \times AL$, hoc eft $x^2 = 1y$, unde $AT = x^2$. Eft autem $AD = AC + CD = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$; & in triangulo rectangulo AED eft $\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{ED}^2 = 4 + \frac{1}{4} qq$.

Deinde $DT (= EG) = DA - AT = 2 - x^2$, & $GP = GT$ (feu ED) $+ TP = \frac{1}{2} q + x$, proinde in triangulo rectangulo ECP eft $\overline{EP}^2 = \overline{EG}^2 + \overline{GP}^2 = 4 - 4x^2 + x^4 + x^2 + qx + \frac{1}{4} qq$, adeoque ob radiorum EP & AE æqualitatem oritur æquatio

$$4 + \frac{1}{4} qq = x^4 - 3x^2 + qx + 4 + \frac{1}{4} qq$$
$$x^4 - 3x^2 + qx = 0$$
$$x^3 - 3x + q = 0.$$

COROLL. *Hinc liquet oleum & operam perdere Geometriæ tyrones, dum anguli trifectioni per lineam rectam & circulum inveniendæ infudant, cum fit problema folidum.*

PROBL.

PROBL. III.

In æquationibus cubicis usus præc. problematis peculiaris ostenditur.

Sit æquatio cubica $x^3 - px - q = 0$, in qua cubus ex triente quantitatis cognitæ tertii termini major sit quadrato ex semisse ultimi termini, hoc est $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, tunc erunt tres radices reales & inæquales *per Propos.* 1. *num.* 2. *Cap.* 9., quæ quidem per Algebram obtineri non possunt, & occurrit casus ille *irreducibilis* de quo diximus *in Schol.* 3. *Prop.* 9. *Cap.* 9. Adhibitis enim Cardani formulis, æquationis radix, quæ realis esse debet, per quantitates imaginarias exprimitur, quod est absurdum. At vero per subtensas arcuum, seu per anguli trisectionem æquationis ejusdem radices opportune designantur modo nunc explicando. *Fig.* 44.

Radio $AE = \sqrt{\frac{1}{3}p}$, qui sit proportione medius inter quantitatis cognitæ p trientem & unitatem (*Vide. Schol. Probl.* 7. *Cap.* 12.) describatur circulus ADF, in quo ducatur chorda $AD = \frac{3q}{p}$, quæ nempe sit ad datam quantitatem q, ut 1 ad $\frac{1}{3}p$, adeoque obtinebitur, si fiat ut $\frac{1}{3}p . 1 :: q . \frac{3q}{p}$. Deinde supponatur divisus arcus $ABCD$ in tres æquales partes AB, BC, CD *per Probl. præc.* ita ut AB, vel BC, aut CD sit $= -x$: patet enim ex signis in data æquatione haberi duas radices falsas & unam veram.

veram. Cum triangula AEB, BAR & RBN similia sint, erit $AE\ (\sqrt{\tfrac{1}{3}p}) \,.\, AB\ (-x) :: AB\ (-x) \,.\, BR\ (\frac{x^2}{\sqrt{\tfrac{1}{3}p}})$ $:: BR\ (\frac{x^2}{\sqrt{\tfrac{1}{3}p}}) \,.\, RN\ (\frac{x^4}{-\tfrac{1}{3}px}) = -\frac{x^3}{\tfrac{1}{3}p}$. Est autem recta $AD + NR = AB + BC + CD$, ut *in præc. Probl.* vidimus, proinde $\frac{3q}{p} - \frac{x^3}{\tfrac{1}{3}p} = -3x$, atque hinc $\frac{x^3}{\tfrac{1}{3}p} = 3x + \frac{3q}{p}$, hoc est $x^3 = px + q$, seu $x^3 - px - q = 0$.

Descripta igitur parabola OAN (*Fig.* 37.) *per Porif.* 1. *aut* 2. tum etiam circulo ENO, qui eam secat in punctis O, B, N, si ex his applicentur ad axem rectæ BC, OP & FN, prodibunt radices æquationis datæ, nimirum BC æqualis chordæ $AB = -x$, OP æqualis chordæ $AF = -x$, & $FN = x$; quæ quidem est vera & duabus prioribus (ad sinistram positis) falsis æqualis. Itaque casus in Algebra *irreducibilis* ex Geometria per anguli trisectionem facile solvitur.

SCHOL. Albertus Girardus ([a]) *hanc methodum*, *cujus est auctor*, *fuse demonstrat*, *quam* Nic. de Martino ([b]) *in Neapolitano Lyceo Regius Mathematum professor egregie contraxit*.

PROBL.

(a) Invention Nouvelle en l'Algebre an. 1629. Vid. Fr. a Schooten in Append. de Cubic. æquat. resolut. (b) Nova Algeb. Elem. lib.2. Cap.7. num.VI.

PROBL. IV.

Quæstionem Pappi resolvere.

PAppus Alexandrinus initio *lib. 7. Collect. Mathemat.* mentionem facit de problemate quodam perplexo, ac difficili, cujus solutionem neque Euclides, neque Apollonius invenerant. Hinc vero Cartesius ([a]) novo Analyseos præsidio post quinque, aut sex hebdomadas extricavit, ibique Geometriæ suæ initia auspicatus est, ubi veteres terminum sibi statuerant. Infinitos autem casus quæstio illa complectitur: ex quibus nos unum vel alterum ex facilioribus, quique per circulum & parabolam construi possint, expendemus, ne tyrones tam famosæ quæstionis notitia diutius lateat. En igitur qualis a Cartesio ([b]) luculenter exponitur, quæ a Pappo tantum fuerat verbis subobscuris indicata.

Datis positione tribus, quatuorve, aut pluribus rectis lineis, quæritur primo punctum, a quo totidem aliæ rectæ lineæ singulæ ad singulas datarum duci possint, quæ cum ipsis datos efficiant angulos, & quarum rectangulum sub duabus contentum datam habeat rationem ad quadratum tertiæ, si sint tres; vel ad rectangulum reliquarum datarum, si sint quatuor; aut si quinque sint, ut parallelepipedum, quod sub tribus ex illis comprehenditur, datam habeat rationem ad parallelepipedum, quod sub duabus reliquis comprehenditur & alia quadam data. Aut si sex sint, ut parallelepipedum sub tribus contentum datam habeat ratio-

([a]) Epist. 71. Tom. 2. ([b]) Geometr. lib. 1. pag. m. 10.

rationem ad parallelepipedum sub tribus reliquis comprehensum &c. Atque ita porro quæstionem hanc ad omnem alium linearum numerum extendere licet.

I. Datæ sint (*Fig.* 46.) quinque rectæ inter se parallelæ *Aa*, *Bb*, *Dd*, *Ee*, *Ff*, quæritur punctum *C*, ex quo si ad quinque rectas datas ducantur *CA*, *CB*, *CD*, *CE*, *CF*, quæ cum prioribus faciant angulum datum gr. 80., parallelepipedum sub $CA \times CD \times CE$ sit ad parallelepidum sub $CB \times CF$ & recta data $2a$, ut 2 ad 1.

Esto factum, & quia datis parallelis datur quoque earum distantia, seu rectæ *AB*, *BD*, *DE*, sint hæ singulæ $= a$, $EF = \frac{1}{2}a$, & $CB = x$, erit $CA = x + a$, $CD = x - a$, $CE = x - 2a$, $CF = x - \frac{5}{2}a$. Atque hinc erit ex conditione problematis

$$x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3 \,.\, 2ax^2 - 5a^2x :: 2 \,.\, 1$$

$$x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3 = 4ax^2 - 5a^2x$$

$$x^3 - 6ax^2 + 9a^2x + 2a^3 = 0$$

Hæc autem æquatio cum per nullum binomium dividi possit, tolli debet secundus terminus, ut per parabolam & circulum construi possit. Fiat igitur $x - 2a = y$, erit $x = y + 2a$, factaque terminorum substitutione, oritur æquatio secundo termino carens *per Prop.* 5. *Cap.* 6.

$$y^3 * - 3a^2y + 4a^3 = 0$$

Hinc ex formula generali $y^3 - px + q = 0$, erit $-3a^2 = -p$, $4a^3 = q$, descriptaque parabola cum parametro $a = 1$, tum etiam circulo omnino ut *in Propos.* 1. *hujus* factum est, invenietur y, cui si addantur $2a$, innotescet punctum x $(= y + 2a) = BC$. Ducta jam *Cc* ceteris *Aa*, *Bb* &c.

Bb &c. parallelæ, ex quovis puncto ejusdem ducantur rectæ datas parallelas in angulo dato secantes, solvitur quæstio.

II. Datæ sint (*Fig.* 47.) positione septem parallelæ, quarum sit æqualis distantia $= a$, quæ faciant quemcunque angulum cum recta *AG*: quæritur punctum *M*, ita ut solidum $MC \times MA \times ME \times MG = MD \times MB \times MF \times 4a$. Sit $MD = x$, erit $MC = x + a$, $MB = x + 2a$, $MA = x + 3a$, $ME = MD - DE = x - a$, $MF = FE + ED - DM = 2a - x$, $MG = GD - DM = 3a - x$. Atque hinc oritur æquatio

$$-x^4 + 10a^2x^2 - 9a^4 = 16a^3x - 4ax^3$$
$$x^4 - 4ax^3 - 10a^2x^2 + 16a^3x + 9a^4 = 0$$

Quæ quidem cum per nullum binomium dividi possit, auferri debet secundus terminus, ut per parabolam & circulum construatur. Itaque sumatur $x - a = y$, erit $x = y + a$; & *per Prop.* 5. *Cap.* 6. oritur æquatio secundo termino carens

$$y^4 * - 16a^2y^2 - 12a^3y + 12a^4 = 0$$

Et comparatis hujus terminis cum formula generali, erit $-16a^2 = -p$, $-12a^3 = -q$, $+12a^4 = r$. Proinde facile construitur *per Prop.* 3. *hujus*, & invenitur y, cui si addatur $+a$, innotescet punctum quæsitum $x = y + a$, a quo ducta *Mm* ceteris *Aa*, *Bb*, *Cc* &c. parallela, ex quocunque illius puncto ducatur recta parallelas *Aa*, *Bb*, *Cc* &c. secans in angulo dato, erit problema solutum.

F I N I S.

INDEX

CAPITUM, ET PROPOSITIONUM.

Definitiones. pag. 1.

CAPUT I.

De Calculo Integrorum.

Prop. I. *Quantitates simplices addere.* p. 3.
Prop. II. *Quantitates simplices subtrahere.* p. 4.
Prop. III. *Quantitates simplices multiplicare.* p. 5.
Prop. IV. *Quantitates simplices dividere.* p. 6.
Lemma. *Quantitates complexas ad simpliciores expressiones reducere.* p. 6.
Prop. V. *Quantitates compositas addere.* p. 7.
Prop. VI. *Quantitates compositas subtrahere.* p. 8.
Prop. VII. *Quantitates complexas multiplicare.* p. 9.
Prop. VIII. *Quantitates complexas dividere.* p. 12.
Prop. IX. *Datæ quantitatis divisores omnes invenire.* p. 15.

CAPUT II.

De Calculo Fractorum.

Axiomata. p. 19.
Prop. I. *Integrum cum fractione ad unam fractionem reducere.* p. 20.
Prop. II. *Fractiones ad simpliciorem expressionem reducere.* p. 21.
Prop. III. *Fractiones ad eandem denominationem reducere.* p. 22.
Prop. IV. *Additio, & subtractio fractionum.* p. 23.
Prop. V. *Fractiones multiplicare.* p. 25.
Prop. VI. *Fractiones dividere.* p. 27.
Prop. VII. *Polynomium cum fractionibus dividere.* p. 29.
Prop. VIII. *Valorem fractionis, cujus denominator est terminus compositus, per infinitos terminos designare.* p. 31.

APPEN-

APPENDIX

De Fractionibus Decimalibus.

Definitiones. p. 34.
Prop. I. *Decimales addere, & subtrahere.* p. 36.
Prop. II. *Decimales multiplicare.* p. 38.
Prop. III. *Decimales dividere.* p. 40.
Prop. IV. *Fractionem quancunque in partes decimales reducere.* p. 41.
Prop. V. *Decimales particulas ad fractionem datæ denominationis reducere.* p. 42.

CAPUT III.

De Calculo Exponentiali.

Definitiones. p. 43.
Prop. I. *Potentiam quancunque per aliam ejusdem radicis multiplicare, aut dividere.* p. 46.
Prop. II. *Potestatem quancunque ad aliam dati exponentis elevare.* p. 47.
Prop. III. *Binomium ad quancunque potentiam elevare.* p. 48.
Prop. IV. *Canonem generalem pro quolibet binomio, aut polynomio ad potestatem quancunque elevando assignare.* p. 52.
Prop. V. *Potestates compositas multiplicare.* p. 54.
Prop. VI. *Potestates compositas dividere.* p. 55.
Prop. VII. *Ex potestatibus radicem extrahere.* p. 56.
Prop. VIII. *Radicem quadratam ex potestatibus compositis extrahere.* p. 58.
Prop. IX. *Ex quantitate composita radicem cubicam extrahere.* p. 60.
Prop. X. *Radices quascunque extrahendi methodum generalem assignare.* p. 62.
Prop. XI. *Extractiones radicum per infinitos terminos continuare.* p. 65.

CAPUT IV.

De Calculo Radicali.

Definitiones. p. 69.
Prop. I. *Quantitates radicales diversæ denominationis ad eandem reducere.* p. 71.

Prop. II. *Radicales ad simpliciorem expressionem reducere*. p. 73.
Prop. III. *Quantitates radicales addere, aut unam ex altera subtrahere*. p. 75.
Prop. IV. *Quantitates radicales multiplicare*. p. 76.
Prop. V. *Quantitates radicales dividere*. p. 79.
Prop. VI. *Radicales compositas dividere*. p. 82.
Prop. VII. *Radicales ad datam potestatem elevare*. p. 85.
Prop. VIII. *Ex simplici radicali radicem extrahere*: p. 88.
Prop. IX. *Ex binomio radicem quadratam extrahere*. p. 89.
Prop. X. *Ex binomio, aut polynomio radicem quadratam per formulam Nevvtonianam extrahere*. p. 91.
Prop. XI. *Radicales universales ad idem nomen, & ad simpliciorem expressionem reducere*. p. 93.
Prop. XII. *Radicalium universalium calculus*. p. 95.
Prop. XIII. *Radicum, quæ imaginariæ dicuntur, calculum expedire*. p. 98.

CAPUT V.

De Æquationibus simplicibus.

Definitiones. p. 103.
Axiomata. p. 104.
Prop. I. *Explicantur regulæ reductionis æquationum*. p. 105.
Prop. II. *Plures simplices æquationes ad unam reducere*. p. 109.
Prop. III. *Theoremata nonnulla explicantur, quæ æquationibus conficiendis inserviunt*. p. 112.
Prop. IV. *Quæstionem datam ad æquationem redigere*. p. 115.
Problemata. p. 118.
Problemata Indeterminata. p. 130.

CAPUT VI.

De Æquationibus compositis.

Prop. I. *Explicatur æquationum compositarum genesis*. p. 138.
Prop. II. *Æquationem quancunque ordinare*. p. 142.
Prop. III. *Radices veras in falsas, & falsas in veras commutare*. p. 144.
Prop. IV. *Radices augere, vel minuere*

nuere data quantitate. p. 145.
Prop. V. *Ex data æquatione secundum terminum tollere.* p. 147.
Prop. VI. *Ex æquatione terminum tertium tollere.* p. 150.
Prop. VII. *Æquationem, in qua termini aliqui desunt, complere.* p. 154.
Prop. VIII. *Æquationis Radices per datam quantitatem multiplicare.* p. 155.
Prop. IX. *Radices æquationis dividere per datam quantitatem.* p. 157.
Prop. X. *Æquationem a fractionibus liberare.* p. 159.
Prop. XI. *Æquationem a radicalibus liberare.* p. 160.
Prop. XII. *Æquationem datam in aliam commutare, in qua quantitas cognita cujuscunque termini, vel etiam terminus ultimus fiat datæ quantitati æqualis.* p. 163.
Prop. XIII. *Invenire maximum duarum æquationum divisorem communem.* p. 165.
Prop. XIV. *Duarum æquationum divisorem communem alia ratione investigare.* p. 168.

CAPUT VII.

De resolutione æquationum compositarum, quæ radices rationales habent.

Prop. I. *Æquationis datæ radices rationales, si quæ sint, invenire.* p. 172.
Prop. II. *Radices rationales propius investigare.* p. 175.
Prop. III. *Idem problema in æquationibus literalibus.* p. 177.
Prop. IV. *Alia methodus æquationes compositas resolvendi.* p. 179.
Prop. V. *Æquationes compositas, in quibus duæ, vel plures radices sunt æquales, resolvere.* p. 183.

CAPUT VIII.

De Æquationibus Quadraticis.

Prop. I. *Æquationes secundi gradus, seu quadraticas resolvere.* p. 186.
Prop. II. *Æquationes secundi gradus alia ratione expendantur.* p. 189.
Prop. III. *Æquationes secundi gradus per formulas generales resol-*

resolvere. p. 190.
Prop. IV. *Æquationes derivativas secundi gradus resolvere.* p. 192.
Problemata. p. 193.
Problemata Geometrica. p. 201.

CAPUT IX.

De Æquationibus Cubicis.

Prop. I. *Explicatur æquationum Cubicarum genesis.* p. 212.
Prop. II. *In æquationibus Cubicis an duæ radices sint æquales, & quænam sint, explorare.* p. 216.
Prop. III. *In æquationibus Cubicis an radix aliqua sit rationalis, & quænam sit, explorare.* p. 217.
Prop. IV. *Æquationes Cubicas, quæ duas radices imaginarias & realem continent, expedire.* p. 221.
Prop. V. *Æquationes Cubicas, in quibus una saltem radix est rationalis, brevius expedire.* p. 225.
Prop. VI. *Æquationes Cubicas, quæ duas imaginarias, & realem irrationalem continent, expedire.* p. 227.
Prop. VII. *Formulas generales, seu regulas Cardani dictas invenire.* p. 233.
Prop. VIII. *Æquationes Cubicas per formulas generales Cardani resolvere.* p. 236.
Prop. IX. *Idem problema brevius absolvitur.* p. 239.
Prop. X. *Ex binomio cubico radicem extrahere.* p. 243.
Problemata Cubica. p. 248.

CAPUT X.

De Æquationibus biquadraticis, & aliis altiorum graduum.

Prop. I. *Æquationes biquadraticas ad cubicas reducere.* p. 256.
Prop. II. *Æquationes quarti gradus resolvere.* p. 259.
Prop. III. *An biquadraticæ, quæ quatuor radicibus imaginariis constant, resolvi possint.* p. 263.
Prop. IV. *Æquationes quarti gradus alia ratione resolvere.* p. 265.
Prop. V. *Æquationem biquadraticam puram, vel secundo & quarto termino carentem solvere.* p. 268.

Proble-

Problemata quarti gradus. p. 270.
Definitiones. p. 281.
Prop. VI. *An aequatio biquadratica reducibilis sit, explorare.* p. 282.
Prop. VII. *An aequatio quinti gradus reducibilis sit, inquirere.* p. 285.
Prop. VIII. *An aequatio sexti gradus sit reducibilis, examinare.* p. 288.

CAPUT XI.

De limitibus radicum, earumque approximatione.

Prop. I. *Radicum limites invenire.* p. 294.
Prop. II. *Radicum limites pro quacunque aequatione methodo Newtoniana indagare.* p. 298.
Prop. III. *Aequationum radices prope veras per approximationem extrahere.* p. 303.
Prop. IV. *Aliae approximandi rationes expediuntur.* p. 305.
Prop. V. *Radices prope veras in aequationibus literalibus indagare.* p. 307.
Prop. VI. *Idem problema alio modo resolvitur.* p. 310.

CAPUT XII.

De Geometrica Constructione Æquationum.

Porisma I. *Fractiones in terminos proportionales resolvere.* p. 314.
Porisma II. *Summam, differentiam quadratorum, & radicum extractiones Geometrice exprimere.* p. 316.
Porisma III. *Aequationes secundi gradus Geometrice construere.* p. 318.
Problemata. p. 321.

APPENDIX

De constructione Problematum solidorum.

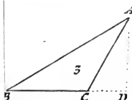
Definitiones. p. 338.
Porisma I. *Parabolam in plano describere.* p. 339.
Porisma II. *Parabolam in plano alia*

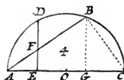
alia ratione describere. p. 340.
Prop. I. *Explicatur constructionis Cartesianæ methodus.* p. 341.
Prop. II. *Æquationum Cubicarum constructio exemplis illustratur.* p. 342.
Prop. III. *Æquationes biquadraticas construere.* p. 346.
Problemata. p. 351.

FINIS.

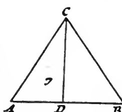
ROMÆ MDCCXLV.

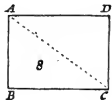
Typis Joannis Zempel prope Montem Jordanum.
SUPERIORUM PERMISSU.


A
3
B
C
D

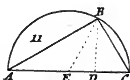

D
B
F
4
A
E
O
G
C

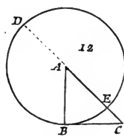

E
B

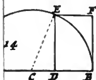

C
7
A
D
B

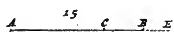

A
D
8
B
C

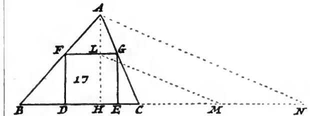

C

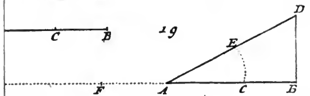

B
11
A
E
D
C

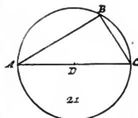

D
12
A
E
B
C

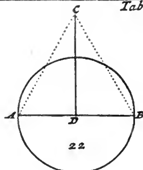

E
F
14
C
D
B

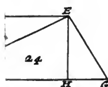

15
A
C
B
E

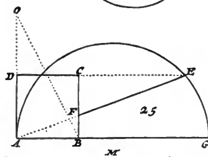

A
F
L
G
17
B
D
H
E
C
M
N


C
B
19
D
E
F
A
C
B

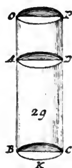




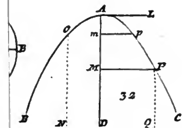


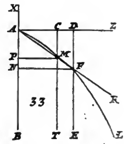




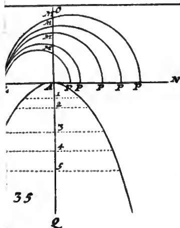


A
D G E
L
28
B F C
H

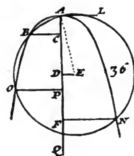




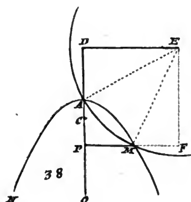
Tab. III.



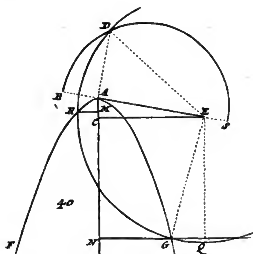
M O
M
M
M
A
P P P P P
N
1
2
3
4
5
35
Q



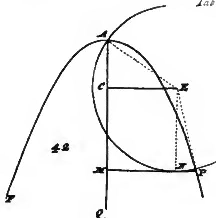
A
L
B
C
D
E
36
O
P
F
N
Q

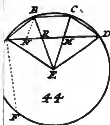


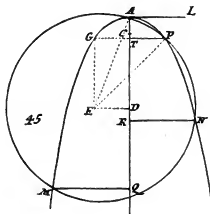
D
E
A
C
P
M
F
38
N
O



D
B
A
R
M
C
E
S
40
F
N
G
Q







A B C D E F G
M
47
a b c d e m f g



